Potęgi i funkcja wykładnicza

19 kwietnia 2018 r.

Zostałem zamieszany przez kolegę w pisanie podstawy programowej. Akurat zespół wyglądał w miarę sensownie: byli nauczyciele uczący w szkołach, byli młodzi ludzie z uczelni, byli tez ludzie doświadczeni w tego rodzaju działalności. Oczywiście, jak to w Polsce, było za mało czasu, więc próba zrobienia czegoś zbyt szybko. Np. absolutnie nie było dosyć czasu na wypracowanie jakiegoś porozumienia z fizykami, ale to sa stałe elementy zupełnie niezależne od tego, kto akurat rządzi krajem (tw. Michała Sz.: każdy rząd po 1918 r. zaczyna działalność od reformy edukacji, nawet jeśli to nie jest całkowita prawda, to wypowiedź ma sens). Ciekawostką jest to, że kazano nam zakończyć prace nad podstawą do LO do czerwca, a potem papiery zapewne nabierały mocy urzędowej do końca lutego, ale to znów jest zwykłe postępowanie urzędników.

Chcę powiedzieć coś o potęgach, trochę w związku z tym, że wypowiadałem się w tej (i wielu innych) kwestii. Nie ograniczę się do szkoły. Najpierw pojawiają się potęgi o wykładniku naturalnym i z nimi nikt kłopotu nie ma. Potem pojawiają się pierwiastki i tu od razu zaczynają się kłopoty, bowiem nasi dydaktycy matematyki umyślili sobie, że pierwiastków z liczb ujemnych nie ma, również nieparzystego stopnia, co nie zgadza się ze zwyczajami reszty świata. Np. kalkulator w moim komputerze wyciąga je bez problemu. Podobnie różne inne urządzenia elektroniczne, oczywiście dostępne, więc zapewne chodzi o wytworzenie zamieszania w głowach uczniowskich (przygotowanie do życia w zamęcie?, jeśli tak, to bardzo rea.listyczne podejście). Zresztą zamęt jest i na świecie, bo np. kalkulator naukowy (pseudo?) w moim telefonie komórkowym nie lubi liczby $(-8)^{1/3}$, również mój stary TI59 (z 1982 r.) nie lubi tego, a ten który mam w szufladzie swego biurka w pracy (jakieś Casio) - przeciwnie, wyświetla natychmiast -2. Dydaktycy zwykle marudzą o funkcji wykładniczej. To ja też trochę pomarudzę. Najpierw jednak powiem, że wedle mej wiedzy pierwiastki poprzedzają w szkole funkcję wykładniczą. Zakaz pierwiastkowania liczb ujemnych jest mało zrozumiały, ale młodzieży na ogół jest wszystko jedno – przecież wiedzą, że na większości lekcji należy mówić i pisać tak, jak nauczyciel chce, a powody są im na ogół obojętne. To też przygotowanie do życie: *rób, co szef każe i nie zastanawiaj się nad tym, a już na pewno nie dyskutuj za dużo.*

Jednak istnieje pewna liczba nauczycieli, którzy chcą swych uczniów nauczyć czegoś naprawdę. Tym koniecznie należy powiedzieć przy okazji definiowania pierwiastków, że pierwiastków stopnia parzystego z liczb ujemnych nie ma, bo potęga parzystego stopnia każdej liczby rzeczywistej jest nieujemna, więc nie ma kandydata na pierwiastek. Przyjmujemy, że pierwiastek stopnia parzystego z liczby nieujemnej jest nieujemny, bo chcemy nadać symbolowi $\sqrt[2n]{a}$ jedno znaczenie. Pierwiastek stopnia nieparzystego z dowolnej liczby rzeczywistej definiujemy w naturalny sposób nie ogran iczając sztucznie dziedziny do liczb rzeczywistych nieujemnych, bo na tym etapie rozwoju nie ma żadnej przyczyny, aby to zrobić. Pierwiastki drugiego i trzeciego stopnia pojawiają się w szkole podstawowej, ale w bardzo ograniczonym zakresie. W LO sytuacja powinna zmienić się. Wtedy należy udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej nieparzystej liczby naturalnej k istnieje co najwyżej jedna taka liczba rzeczywista b, że $b^k = a$, a dla każdej liczby nieujemnej a i każdej liczby naturalnej k istnieje dokładnie jedna taka liczba rzeczywista $b \geqslant 0$, że $a = b^k$. Korzystać należy z monotoniczności potęgi, która wynika z tego, że nierówności można przy odpowiednich założeniach mnożyć stronami, a tego uczniów nauczyć należy. Kwestia istnienia zahacza o pewnik ciągłości, a tego w szkole nie ma. Można natomiast naszkicować dowód istnienia. Należy w tym celu np. wykazać, że jeśli $0 \leqslant x < y \leqslant a+1$, to

$$0 < y^k - x^k = (y-x)(y^{k-1} + y^{k-2}x + y^{k-3}x^2 + \ldots + x^{k-1} \leqslant (y-x) \cdot k(a+1)^{k-1}.$$

Wynika stąd, że dowolnie blisko liczby a znajdują się k–te potęgi liczby postaci $\frac{\ell}{m}$, gdzie m, ℓ są liczbami naturalnymi: przy ustalonym m wybieramy największe naturalne ℓ, dla którego $\left(\frac{\ell}{m}\right)^k \leqslant a$. Wtedy $\left(\frac{\ell+1}{m}\right)^k > a$, zatem $a - \left(\frac{\ell}{m}\right)^k < \left(\frac{\ell+1}{m},\right)^k - \left(\frac{\ell}{m}\right)^n < \frac{1}{m} \cdot k(a+1)^{k-1}$. Jasne jest, że jeśli $m > \frac{\varepsilon}{k(a+1)^{k-1}}$ to $a - \left(\frac{\ell}{m}\right)^k < \varepsilon$, a więc umiemy wskazać tak duże m i odpowiednie ℓ, że różnica między a i k–tą potęgą liczby $\frac{\ell}{m}$ jest dowolnie mała. I to w zasadzie koniec dowodu. Oczywiście nie ma formalnego zakończenia, bo nie powołujemy się na pewnik ciągłości. Można to jednak zakończyć powołując się na jego wersję, którą można w szkole sformułować: *ciąg niemalejący i ograniczony z góry ma skończoną granicę.* Można też przy tej okazji poprawić znacznie opowiadanie i opowiedzieć przy okazji, jak kalkulatory i inne elektroniczne urządzenia znajdują pierwiastki.

Niech a będzie liczbą dodatnią. Niech $x_0 = a$ oraz $x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((n-1)x_n + \frac{a}{x_k^{k-1}}\right)$. Liczba x_{n+1} to średnia arytmetyczna $k-1$ liczb x_n oraz liczby $\frac{a}{x_n^{k-1}}$. Wobec tego x_{n+1} leży między liczbami x_n oraz $\frac{a}{x_n^{k-1}}$. Z twierdzenia o średniej arytmetycznej i geometrycznej wynika nierówność

$$x_{n+1}^k = \left(\frac{k-1}{k}x_n + \frac{a}{kx_n^{k-1}}\right)^k \geqslant x_n^{k-1} \cdot \frac{a}{x_n^{k-1}} = a$$

– unikamy na razie pierwiastka. Wynika stąd, że $x_{n+1} \geqslant \frac{a}{x_{n+1}^{k-1}}$, więc $x_{n+1} \geqslant x_{n+2} \geqslant \frac{a}{x_{n+1}^{k-1}}$, a to oznacza, że od pewnego miejsca wyrazy ciągu (x_n) nie rosną, a ponieważ ciąg ten jest ograniczony z dołu, więc ma skończoną granicę. Granica ta jest z pewnością dodatnia (ciągle nie korzystamy z istnienia pierwiastków), to $x_{n+1}^k \geqslant a > \frac{a}{a+1} \geqslant \left(\frac{a}{a+1}\right)^k$, zatem $x_{n+1} > \frac{a}{a+1}$ dla każdego n. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = r$. Z twierdzenie o granicy sumy, iloczynu i ilorazu oraz oczywistej równości $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = r$ wnioskujemy, że $r = \frac{1}{k}\left((k-1)r + \frac{a}{r^{k-1}}\right)$, więc $r = \frac{a}{r^{k-1}}$, czyli $r^k = a$.

A teraz przyjrzyjmy się ciągowi (x_n), gdy $k = 2$ i $a = 19$. Wtedy $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{19}{x_n}\right) \geqslant \sqrt{19}$ dla każdego n. Obliczmy kilka wyrazów ciągu (x_n). Mamy

$x_1 = \frac{1}{2}(19 + \frac{19}{19} = 10,$

$x_2 = \frac{1}{2}(10 + \frac{19}{10}) = 5{,}95,$

$x_3 = \frac{1}{2}(5{,}95 + \frac{19}{5{,}95}) \approx 4{,}5716386554621848739,$

$x_4 \approx \frac{1}{2}(4{,}5716386554621848739 + \frac{19}{4{,}5716386554621848739}) \approx 4{,}3638488300517578476,$

$x_5 \approx \frac{1}{2}(4{,}3638488300517578476 + \frac{19}{4{,}3638488300517578476}) \approx 4.3589017508533723658,$

$x_6 \approx \frac{1}{2}(4{,}3589017508533723658 + \frac{19}{4{,}3589017508533723658}) \approx 4.3588989435415775649,$

$x_7 \approx \frac{1}{2}(4{,}3588989435415775649 + \frac{19}{4{,}3588989435415775649}) \approx 4.3588989435406735522,$

$x_8 \approx \frac{1}{2}(4{,}3588989435406735522 + \frac{19}{4{,}3588989435406735522}) \approx 4.3588989435406735522,$

Jak widać, z punktu widzenia 19 cyfr po przecinku $x_7 = x_8$, więc dalej nie co liczyć. Znaleźliśmy poszukiwany pierwiastek w 8 krokach. Przypadek, czy tak będzie zawsze? Otóż

$$x_{n+1} - \sqrt{19} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{19}{2x_n}\right) - \sqrt{19} =$$
$$= \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 + 19 - 2\sqrt{19}x_n\right) = \frac{1}{2x_n}\left(x_n - \sqrt{19}\right)^2 \leqslant \frac{1}{8{,}7}\left(x_n - \sqrt{19}\right)^2.$$

Z tych nierówności wynika, że gdy już zbliżymy się do $\sqrt{19}$, to liczba dokładnych miejsc po przecinku przy zastąpieniu liczby x_n liczbą x_{n+1} wzrośnie bardziej niż dwukrotnie. Jest więc to całkiem niezła metoda efektywnego pierwiastkowania. Pochodzi ona od Newtona. Z definicji pochodnej wynika przybliżona równość $f(p+h) \approx f(p) + f'(p)h$. Rozwiązujemy równanie $0 = f(p+h) \approx f(p) + f'(p)h$, więc $p + h \approx p - \frac{f(p)}{f'(p)}$, co prowadzi do ciągu rekurencyjnego zdefiniowanego za pomocą wzoru $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Jeśli $f(x) = x^k - a$, to

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right).$$

Zauważmy jeszcze, że jeśli $g(x) = \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}}\right)$, to $g\left(\sqrt[k]{a}\right) = \sqrt[k]{a}$ oraz

$$g'(x) = \frac{1}{k}\left((k-1) - (k-1)\frac{a}{x^k}\right) = \frac{k-1}{k}\left(1 - \frac{a}{x^k}\right), \quad \text{zatem} \quad g'\left(\sqrt[k]{a}\right) = 0\,.$$

Stąd wynika, że ciąg (x_n jest „szybko zbieżny” do $\sqrt[k]{a}$, bo (tw. Lagrange'a o wartości średniej)

$$x_{n+1} - \sqrt[k]{a} = g(x_n) - g\left(\sqrt[k]{a}\right) = g'(c)(x_n - \sqrt[k]{a})$$

dla pewnego c leżącego pomiędzy $\sqrt[k]{a}$ i x_n, a w pobliżu $\sqrt[k]{a}$ pochodna jest bliska zeru, więc x_{n+1} jest znacznie bliżej $\sqrt[k]{a}$ niż x_n.

Wracamy do potęgowania. Najważniejszą jego własnością jest równość

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \tag{pot}$$

zwykle umieszczana wśród kilku innych równości traktowanych w szkołach jako tak samo ważne. Z niej wynika, że jeśli chcemy zdefiniować potęgi dla wszystkich wykładników wymiernych albo wszystkich rzeczywistych, to musimy pogodzić się z dodatnimi wynikami. Jeśli $a^p = 0$ dla pewnego p, to $a^x = a^p \cdot a^{x-p} = 0$ dla każdego x, więc to trochę bez sensu (ale dla $a = 0$?). Dalej $a^x = a^{x/2} \cdot a^{x/2} = \left(a^{x/2}\right)^2 \geqslant 0$. Z ostatnich dwóch zdań wynika, że jeśli chcemy zdefiniować a^x dla wszystkich wymiernych lub wszystkich rzeczywistych wykładników, to trzeba pogodzić się z dodatniością potęg, więc można uznać, że miłośnicy tej teorii mają rację. Jednak oni tego nie wyjaśniają: uczeń ma przecież wierzyć w opowieści nauczyciela i nie kwestionować ich. Dalej $a^x = ax + 0 = a^x \cdot a^0$, zatem $a^0 = 1$ – ta równość też jest wymuszona, a nie jest wynikiem widzimisię definiującego!. Skoro $a^0 = 1$, to $1 = a^{x-x} = a^x \cdot a^{-x}$, co wymusza wzór $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$. W taki sam sposób przekonujemy się, że $(a^{x/n})^n = a^x$, zatem $a^{x/n} = \sqrt[n]{a^x}$ dla każdej liczby naturalnej n. To prowadzi do wzoru $a^{k/n} = \sqrt[n]{a^k}$ dla dowolnego naturalnego n i całkowitego k tak, jak każdy nauczyciel naucza. Ale to jest wymuszone równością $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. Moim zdaniem to należy uświadamiać uczniom. To nie koniec. Co z wykładnikami niewymiernymi, o których należałoby wspominać, bo wprowadzane są logarytmy, a te nie chcą być zawsze wymierne: $10^{\log 2} = 2$, więc gdyby $\log 2 = \frac{p}{q}$ dla pewnych $p, q \in \mathbb{N}$, to byłoby $10^p = 2^q$, a to niestety nie jest możliwe, bo $log2 > 0$, więc $p, q > 0$, ale wtedy liczba 10^p dzieli się przez p w odróżnieniu od liczby 2^q. Coś więc powiedzieć trzeba. Tu równanie $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ przestaje działać tak dobrze, jak do tej pory. Gdybyśmy ograniczyli się do zbioru złożonego z liczb postaci $a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}$, to moglibyśmy zdefiniować $5^{\sqrt{2}}$ niekoniecznie tak, jak to robimy (ale czy robimy?!). Np. moglibyśmy przyjąć, że $5^{a+b\sqrt{2}} = 5^a$ niezależnie od b i równość $5^{x+y} = 5^x \cdot 5^y$ miałaby się całkiem dobrze. Ale nic nie stałoby na przeszkodzie by zdefiniować $5^{a+b\sqrt{2}} = 5^a \cdot 7^b$. Też wszystko byłoby w porządku, choć byłoby niezgodne z naszymi przyzwyczajeniami i w dodatku byłoby mniej użyteczne. Trzeba skorzystać z jeszcze jednej własności potęgowania. To monotoniczność lub ciągłość, lub różniczkowalność w jednym punkcie lub ograniczoność funkcji 5^x na jakimś przedziale. W szkole najbezpieczniejsza jest monotoniczność. Funkcja 5^x jest ściśle rosnąca na $\mathbb{Q}$ – łatwe, nieco żmudne, jeśli chcemy podać pełny dowód ze wszystkimi detalami. Wtedy można powiedzieć, że np. $5\sqrt{2}$ to taka liczba, że jeśli $\frac{p}{q} < 2 < \frac{r}{s}$ dla pewnych liczb naturalnych p, q, r, s, to $5^{p/q} < 5^{\sqrt{2}} < 5^{r/s}$.

Nietrudno jest wykazać, że z monotoniczności wynika, że taka liczba jest co najwyżej jedna, a jej istnienie wymaga odwołania się do pewnika ciągłości. Zachodzi nierówność $\sqrt{a} \leqslant \frac{1+a}{2}$, bo $0 \leqslant (\sqrt{a}-1)^2$. Wobec tego jeśli $a > 1$, to $1 < \sqrt[4]{a} \leqslant \frac{\sqrt{a}+1}{2} \leqslant \frac{\frac{a+1}{2}+1}{2} = \frac{a+3}{4}$. Kontynuując otrzymujemy $1 < \sqrt[8]{a} \leqslant \frac{\sqrt[4]{a}+1}{2} \leqslant \frac{\frac{a+3}{4}+1}{2} = \frac{a+7}{8}$. Postępując nadal w ten sposób otrzymujemy nierówność

$$1 < \sqrt[2^n]{a} \leqslant \frac{a+2^n-1}{2^n} = 1 + \frac{a-1}{2^n}\,.$$

Wobec tego jeśli $x < y < x + \frac{1}{2^n}$ i $a > 1$, to

$$0 < a^y - a^x = a^x\left(a^{y-x}-1\right) < a^x\left(a^{1/2^n}-1\right) \leqslant \frac{a-1}{2^n}\,,$$

a z stąd już bez trudu wnioskujemy, że między liczbami $a^{p/q}$ i $a^{r/s}$, gdzie $\frac{p}{q} < \sqrt{2} < \frac{r}{s}$ miejsca jest na jedną tylko liczbę rzeczywistą. Wobec tego dodanie do warunku $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ monotoniczności definiuje już potęgę o dowolnym wykładniku rzeczywistym. Coś na ten temat powinno pojawiać się w szkolnych podręcznikach, a w lepszych klasach również w trakcie lekcji. Definiowanie różnych rzeczy jest ważne nie tylko w matematyce, ale matematyka w szkołach jest jedynym przedmiotem pozwalającym na ścisłe definiowanie pojęć i korzystanie z tych definicji później.

Trzeba tu wyraźnie powiedzieć, że to, co wcześniej powiedzieliśmy nijak nie ma się do pierwiastków nieparzystego stopnia z liczb ujemnych. One po prostu nie podpadają pod hasło: funkcja wykładnicza i nie należy ich na siłę z nim wiązać. Warto jednak stosować oznaczenie $a^{1/3}$ i odpowiednio inne, bo wtedy różne wzory, np. na pochodną dobre działają. Jednak należy ostrzec młodych ludzi, bo znane dowcipy w rodzaju $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, zatem $\sqrt[3]{a} = a^{1/3} = a^{2/6} = \sqrt[6]{a^2}$ prowadzą m.in. do równości $-1 = \sqrt[3]{-1} = \ldots = \sqrt[6]{(-1)^2} = 1$. Należy uczniów/studentów ostrzec, że mogą pojawiać się tego rodzaju problemy, więc powinni uważać i korzystać z wzorów ostrożnie, ewentualnie zastanawiać się nad ich dowodami. Wzór $(x^{1/3})' = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ działa bardzo dobrze, również dla $x = 0$, co wymaga przyjęcia równości $\frac{1}{\sqrt[3]{0^2}} = +\infty$, ma ona sens pochodna funkcji $\sqrt[3]{x}$ w punkcie 0 jest równa $+\infty$. Podobnie $\left(x^{-14/5}\right)' = -\frac{14}{5}x^{-19/5}$ lub ogólnie

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

zawsze wtedy, gdy prawa strona, więc ax^{a-1}jest dobrze zdefiniowana, co w wypadku $x = 0$ oznacza, że $a \geqslant 0$, zaś w wypadku $x < 0$ oznacza, że liczba $a-1$ może być zapisana w postaci ułamka o liczniku całkowitym i mianowniku całkowitym, **nieparzystym.**Innymi słowy staramy się nadać jak najszerszy sens definicji potęgi o ujemnej podstawie. Dodajmy jeszcze, że poza szkołą można to robić jeszcze szerzej używając liczb zespolonych i odpowiednich gałęzi logarytmu, ale to się zupełnie do szkoły nie nadaje, jednak istnieje i wprowadzając różne określenia należy mieć na uwadze to, że część uczniów, na ogół akurat tych przytomniejszych, czekają spotkania z innymi definicjami po szkole. Doprowadzenie do ich świadomości tego, że definiujemy coś by było nam wygodniej operować potęgami jest ważniejsze od ułatwiania życia tym, którzy albo nie chcą się niczego nauczyć, albo nie są w stanie. Świat przestał być podzielony na sztywno granicami, które w wielu wypadkach przekracza się bez trudu, inaczej niż w czasach „żelaznej kurtyny”, która pozwalała dydaktykom coś decydować na terenie Polski bez zwracania uwagi na to, co poza nią się dzieje. W dodatku ten internet, programy komputerowe itd.

Jeszcze słowo o urządzeniach elektronicznych i programach komputerowych. Niektóre obliczają pierwiastki korzystając z logarytmów. Wtedy jest na ogół problem z liczbami ujemnymi (nie zawsze). Ale wtedy jeśli chcemy zmusić urządzenie do współpracy, powinniśmy umieć zwalczyć trudności. W tej konkretnej sytuacji napisać np. $\mathrm{sign}(x)|x|^{1/3}$ i wszystko będzie w porządku. To można robić, gdy mamy do czynienia z wyrażeniem $a^{p/q}$, gdzie q jest nieparzystą liczbą całkowitą, a p – liczbą całkowitą. Używać należy, bo czasem te funkcje przydają się również poza matematyką.

Jeśli zainteresujemy się wykładnikami zespolonymi, to sytuacja zmienia się istotnie, bo w zbiorze liczb zespolonych nie można wprowadzić nierówności zgodnej z dodawaniem i mnożeniem. Nie stosujemy więc nierówności, zatem monotoniczność tym razem nas nie uratuje. Nie ratuje nas też ciągłość, bo funkcje ($x, y \in \mathbb{R}$) zdefiniowane wzorami $f(x+yi) = 2^x$, $g(x+yi) = 2^x 3^y$ spełniają równanie $f(z_1+z_2) = f(z_1)f(z_2)$, są ciągłe, spełniają też warunek $f(1) = 2 = g(1)$, ale są różne. By uzyskać jednoznaczność trzeba założyć coś innego. Może to być różniczkowalność. Jeśli chcemy zdefiniować potęgi o wykładniku zespolonym, to warto zacząć od najważniejszej podstawy potęg i logarytmów, więc od liczby e. Niech $e^z = f(z)$. Mają być spełnione równości $f(z_1+z_2) = f(z_1)f(z_2)$ oraz $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-1}{z} = 1$. Udowodnimy, że

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n . \qquad \text{(exp)}$$

Lemat 1.1 Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (1+a_n)^n = 1$

Dowód. Jeśli n jest dostatecznie duże, to $|na_n| < \frac{1}{2}$, więc jeśli dodatkowo $a_n \in \mathbb{R}$, to na mocy nierównosci Bernoulliego możemy napisać

$$1 + na_n \leqslant (1+a_n)^n = \frac{1}{\left(1-\frac{a_n}{1+a_n}\right)^n} \leqslant \frac{1}{1-\frac{na_n}{1+a_n}} ,$$

więc teza w wypadku rzeczywistego ciągu (a_n) wynika od razu z twierdzenia o trzech ciągach.

W dalszym ciągu $a_n \in \mathbb{C}$. Wtedy

$|(1+a_n)^n - 1| = |\binom{n}{1}a_n + \binom{n}{2}a_n^2 + \ldots + \binom{n}{n}a_n^n| \leqslant \binom{n}{1}|a_n| + \binom{n}{2}|a_n|^2 + \ldots + \binom{n}{n}|a_n|^n = (1+|a_n|)^n - 1.$ Z lematu zastosowanego do ciągu **rzeczywistego** $(|a_n|)$ wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} (1+|a_n|)^n - 1 = 0$, a to oznacza koniec dowodu.

Lemat 1.2 Dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

Dowód. Jeśli $x > -n$, to $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$, bo wtedy $x+n > 0$ i wobec tego

$$\frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{x}{n}\right) \cdot \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}} \geqslant \frac{x+n}{n} \cdot \left(1 + (n+1)\cdot \frac{\frac{x}{n+1}-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right) = 1 .$$

Ciąg jest więc od pewnego miejsca niemalejący, zatem ma granicę, być może równą $+\infty$. Granica jest na pewno dodatnia, bo od pewnego miejsca wyrazy ciągu są dodatnie i rosną. Jeśli $x \leqslant 0$, to od pewnego momentu wyrazy ciągu są mniejsze lub równe 1, zatem w tym wypadku granica jest skończona. Jeśli $x > -0$, to $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{-x}{n}\right)^n}$. Licznik ma granicę 1 – to z poprzedniego lematu, mianownik ma granicę skończoną i dodatnią, to już udowodniliśmy, więc teza wynika z twierdzenia o granicy ilorazu.

Lemat 1.3 Dla każdej liczby zespolonej z istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Dowód. Dowód. Zauważmy najpierw, że jeśli $n > m \geq k \geq 0$, to $\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} < \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$.Wynika to natychmiast z tego, że

$$\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{m^k k!} = \left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\cdot\frac{1}{k!},$$

wobec tego zastępując w tym wzorze m przez $n > m$ zwiększamy mianowniki zachowując liczniki bez zmian, co oczywiście powoduje wzrost mnożonych ułamków. Mamy zatem

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \left(1+\frac{z}{m}\right)^m\right| = \Bigg|1+\binom{n}{1}\frac{z}{n}+\binom{n}{2}\left(\frac{z}{n}\right)^2+\cdots+\binom{n}{n-1}\left(\frac{z}{n}\right)^{n-1}+\left(\frac{z}{n}\right)^n -$$
$$-\left(1+\binom{m}{1}\frac{z}{m}+\binom{m}{2}\left(\frac{z}{m}\right)^2+\cdots+\binom{m}{m-1}\left(\frac{z}{m}\right)^{m-1}+\left(\frac{z}{m}\right)^m\right)\Bigg| \leqslant$$
$$\leqslant [1-1]+\left[\binom{n}{1}\frac{1}{n}-\binom{m}{1}\frac{1}{m}\right]|z|+\left[\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}-\binom{m}{2}\frac{1}{m^2}\right]|z|^2+\cdots+\left[\binom{n}{m}\frac{1}{n^m}-\binom{m}{m}\frac{1}{m^m}\right]|z|^m+$$
$$+\binom{n}{m+1}\frac{1}{n^{m+1}}|z|^{m+1}+\cdots+\binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{n-1}}|z|^{n-1}+|z|^n = \left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n-\left(1+\frac{|z|}{m}\right)^m.$$

Ponieważ ciąg $\left((1+\frac{|z|}{n})^n\right)$ jest zbieżny (liczba $|z|$ jest rzeczywista!), więc spełnia on warunek Cauchy'ego, wobec tego również ciąg $\left((1+\frac{z}{n})^n\right)$spełnia warunek Cauchy'ego – wykazaliśmy bowiem, że odległości między wyrazami tego ostatniego nie przekraczają odległości odpowiednich wyrazów ciągu $\left((1+\frac{|z|}{n})^n\right)$. Lemat został dowiedziony.

Teraz możemy udowodnić wzór (exp). Przyjmijmy, że $r_n = f\left(\frac{z}{n}\right) - 1 - \frac{z}{n}$. Z założenia o funkcji f wnioskujemy, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r_n}{z/n} = 0$, więc również $\lim\limits_{n\to\infty} nr_n = 0$. Wobec tego

$$f(z) = \left(f(\frac{z}{n}\right)^n = \left(1+\frac{z}{n}+r_n\right)^n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{r_n}{1+\frac{z}{n}}\right)^n.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} nr_n = 0$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{r_n}{1+\frac{z}{n}}\right)^n = 1$, zatem $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Kwestię istnienie funkcji f można załatwić teraz kilkoma sposobami. Można korzystając z tego, że funkcja e^x, $x\in\mathbb{R}$ może być zdefiniowana wzorem $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ udowodnić, że

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \left(1+\frac{z}{m}\right)^m\right| \leqslant \left|\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n - \left(1+\frac{|z|}{m}\right)^m\right|$$

i skorzystać z tego, że ciąg spełnia warunek Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg ten ma skończoną granicę. Można napisać, że $e^{x+yi} = e^x(\cos y + i\sin y)$ i sprawdzić, że tak zdefiniowana funkcja ma własności (pot) i (exp). Z wzoru $e^z \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ i najprostszych własności sprzężenia wynika, że $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$, a stąd otrzymujemy $\overline{e^{it}} = e^{-it}$ dla każdej liczby rzeczywistej f. Wynika stąd, że $|e^{it}|^2 = e^{it}\cdot\overline{e^{it}} = e^{it}\cdot e^{-it} = e^0 = 1$. Mamy też $\mathrm{re}(e^{it}) = \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})$ oraz $\mathrm{im}(e^{it}) = \frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})$. W rzeczywistości otrzymaliśmy wzory Eulera

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it}) \quad \text{oraz} \quad \sin t\frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it}).$$

Można uznać, że jest to definicja kosinusa i sinusa, trochę dziwna z punktu widzenia szkoły, ale chcę po prostu powiedzieć, że z wzorów Eulera i własności funkcji wykładniczej wynikają łatwo własności funkcji trygonometrycznych, oczywiście w szkole definicja funkcji trygonometrycznych powinna być podana w oparciu o koło trygonometryczne (związana z długością łuku okręgu i bez nawet próby wnikania w odpowiedź na pytanie o znaczenie słów *zgodnie z ruchem wskazówek zegara).* Jednak z wzorów Eulera można wyprowadzać wzory typu $\cos(\alpha+\beta) = \ldots$, $\sin(\alpha+\beta) = \ldots$. Nie wydłużam listy znanych wzorów. Napiszmy jeszcze

$$-1 = \cos\pi + \sin\pi = e^{\pi i}$$

lub nieco inaczej $e^{\pi i}+1 = 0$. Wzory Eulera pozwalają tłumaczyć problemy trygonometryczne na problemy dotyczące funkcji wykładniczej z wykładnikiem zespolonym, co często je upraszcza.

Kilka zadań, które mogą zainteresować niektórych uczniów (myślę o mniejszości).

(osoba zainteresowana rozwiązaniem któregoś z zadań, która nie może go rozwiązać, może napisać do autora strony po wskazówkę).

1. Udowodnić, że jeżeli $a > 0$ jest liczbą całkowitą i nie jest potęgą liczby 10 o wykładniku naturalnym, to $\log_{10} a$ jest niewymierny.

2. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb niewymiernych $x_1, x_2, x_3, \ldots$, że jeśli $k_1, k_2, k_3, \ldots$ są liczbami całkowitymi oraz $k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + \ldots + k_mx_m = 0$ dla pewnej liczby naturalnej m, to $k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = k_m = 0$.

3. Udowodnić, że istnieją takie liczb y niewymierne a, b, że a^b jest liczbą wymierną.

4. Rozwiązać równanie $\log_4(x+2)\log_x 2 = 1$.

5. Rozwiązać równanie $\log(152 + x^3) - 3\log(x+2) = 0$.

6. Rozwiązać równanie $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

7. Rozwiązać równanie $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x$.

8. Rozwiązać równanie
$\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+9}+\sqrt{x^2-8x+7}}\right)^x + \left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+9}-\sqrt{x^2-8x+7}}\right)^x = 2^{1+x/4}$.

9. Ile rozwiązań ma równanie $2^x = x + 3$.

10. W czterocyfrowych tablicach logarytmów dziesiętnych znaleźć liczbę $\log 2$ z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku.

11. Dowieść, że jeśli $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $a \neq b \neq c \neq a$, to $a^ab^bc^c > \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$.

12. Dowieść, że jeśli $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $a \neq b \neq c \neq a$, to $a^ab^bc^c < \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c}$.

13. Niech $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ściśle monotoniczną, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ zachodzi wzór $f(mn) = f(m) + f(n)$. Dowieść, że istnieje taka liczba $a > 0$, $a \neq 1$, że równość $f(n) = \log_a n$ zachodzi dla każdej liczby naturalnej n.

14. Niech $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.
Te funkcje nazywane są sinusem hiperbolicznym i kosinusem hiperbolicznym.
Udowodnić, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzą równości:

- (a) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cdot\cosh(y) + \sinh(y)\cdot\cosh(x)$,
- (b) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cdot\cosh(y) + \sinh(y)\cdot\sinh(x)$,
- (c) $\cosh^2(x) - \sinh^2(y) = 1$,
- (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sinh(x)}{x} = 1$,
- (e) $\cosh(x) = \cos(ix)$ oraz $\sinh(x) = i\sin(ix)$.

15. Udowodnić, że jeśli przekształcenie $F\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ jest izometrią, czyli $|F(z_1) - F(z_2)| = |z_1 - z_2|$ dla każdej pary liczb $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, to istnieją takie liczby $a, b \in \mathbb{C}$, że $|a| = 1$ i albo dla każdego $z \in \mathbb{C}$ zachodzi równość $F(z) = az + b$, albo dla każdego $z \in \mathbb{C}$ zachodzi równość $F(z) = a\overline{z} + b$.

16. Niech $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$ i $F(z) = az + b$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$. Dla jakich par liczb $a, b \in \mathbb{C}$ istnieje taka liczba z, że $F(z) = z$?

17. Niech $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$ i $F(z) = a\overline{z} + b$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$. Dla jakich par liczb $a, b \in \mathbb{C}$ istnieje taka liczba z, że $F(z) = z$?

18. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ będą takimi liczbami zespolonymi, że $ad \neq bc$ i niech $F(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$, dla którego $cz + d \neq 0$. Udowodnić, że wtedy jeśli $z_1 \neq z_2$, to $F(z_1) \neq F(z_2)$ oraz dla każdego $w \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ istnieje dokładnie jedno takie $z \in \mathbb{C}$, że $w = F(z)$. *Jeśli* $c = 0$, *to* $\{\frac{a}{c}\} = \emptyset$.

19. Niech a, b, c, d i F będą takie, jak w poprzednim zadaniu oraz $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. Dowieść, że wtedy $\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = \frac{F(z_1) - F(z_3)}{F(z_1) - F(z_4)} : \frac{F(z_2) - F(z_3)}{F(z_2) - F(z_4)}$.
Liczba $\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$ *nazywana jest dwustosunkiem czwórki punktów* $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$. *Jest ona rzeczywista wtedy i tylko wtedy, gdy punkty* z_1, z_2, z_3, z_4 *leżą na jednej prostej lub na jednym okręgu. Twierdzenie mówi, że homografia* F *zachowuje dwustosunek czwórki punktów.*

20. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej n istnieje dokładnie jedna taka liczba z, że $e^z = z$ oraz $2n\pi < \mathrm{im}(z) < 2(n+1)\pi$.
Ciekawostka. W pracy z 1926 r. P. Fatou zadał pytanie, które można sformułować tak: czy prawdą jest, że jeśli D *jest kołem otwartym (o dowolnym promieniu, nawet bardzo małym), to zbiór* $D \cup f(D) \cup f(f(D)) \cup \ldots$ *zawiera wszystkie liczby zespolone z wyjątkiem co najwyżej jednej. Odpowiedź na to pytanie jest pozytywna o została po raz pierwszy opublikowana w pracy Michała Misiurewicza z 1981 r. „On the iterates of* e^z*”, Ergodic theeory Dynamical Systems 1 (1981), str. 103-106.*

21. Niech $f_1(z) = e^z$ i $f_{n+1}(z) = e^{f_n(z)}$. Udowodnić, ze dla dowolnej liczby naturalnej n i dolnej liczby zespolonej z zachodzi nierówność $\mathrm{im}(f_n(z)) \leqslant |f_n'(z)|$.

22. Dowieść, że jeśli $|z_j| \geqslant 1$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$ oraz $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0$ i $|u| \leqslant 1$, to $|z_1 - u| + |z_2 - u| + \ldots + |z_n - u| \geqslant 1$.

23. Rozwiązać równanie $z^4 + z^3 - z^2 + z + 1 = 0$ i dowieść, że ani jedno jego rozwiązanie nie jest pierwiastkiem z 1, chociaż dwa rozwiązania są liczbami o wartości bezwzględnej 1.

24. Z wzoru na sumę pierwszych n wyrazów ciągu geometrycznego wyprowadzić wzór na sumę: $\sin\varphi + \sin(2\varphi) + \cdots + \sin n\varphi$ oraz na sumę $\cos\varphi + \cos(2\varphi) + \cdots + \cos(n\varphi)$.

25. Obliczyć sumę $\cos^2\varphi + \cos^2(2\varphi) + \cdots + \cos^2(n\varphi)$.

26. Obliczyć sumę $\binom{n}{1}\cos\varphi + \binom{n}{2}\cos(2\varphi) + \cdots + \binom{n}{n}\cos(n\varphi)$.

27. Dowieść, że $\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cdots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}$.

28. Obliczyć sumę $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \binom{n}{9} + \cdots$.

29. Obliczyć sumę $\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \binom{n}{10} + \cdots$.

30. Znaleźć sumę pięćdziesiątych potęg długości wszystkich boków i przekątnych stukąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1.

31. Udowodnić, że suma kwadratów długości wszystkich boków i przekątnych n–kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 jest równa n^2.

32. Udowodnić, że suma kwadratów długości wszystkich boków i przekątnych n–kąta foremnego opisanego na okręgu o promieniu 1 jest równa $n \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$.

33. Udowodnić, że iloczyn kwadratów długości wszystkich boków i przekątnych n–kąta foremnego opisanego na okręgu o promieniu 1 jest równa $\sqrt{n^n}$.

34. Niech g oznacza funkcję ciągłą określoną na pewnym kole o środku w punkcie 0. Niech $f(z) = a + bz^n + z^{n+1}g(z)$, $a, b \in \mathbb{C}$. Udowodnić, że dla każdego $\delta > 0$ istnieją takie liczby z_1, z_2, że $|f(z_1)| < |f(0)| < |f(z_2)|$.