Formalizm, formalistyka i dydaktyka

21 października 2017 r.

René Thom, 1923 – 2002, w 1958 nagrodzony medalem Fieldsa za swe osiągnięcia w topologii, później twórca teorii katastrof, która miała opisywać różne zjawiska kiedyś napisał: The importance of the „New Mathematicsłies mainly in the fact that it has taught us the difference between the disc and the circle.

Gdy byłem uczniem wolno było np. mówić koło wpisane w trójkąt, a teraz jest to już zapewne zakazane. Powód tej zmiany nie jest dla mnie do pojęcia, ale nie muszę przecież nadążać za wybitnymi dydaktykami. Wiążą się z tym inne zmiany terminologii. Ja mówiłem i nadal mówię *punkt leży na prostej,* a miłośnicy teorii, wedle której prosta to zbiór punktów mówią *punkt należy do prostej,* bo to ponoć lepiej. Niektórzy z nich mogliby np. przeczytać fragment podręcznika R. Engelkinga „Zarys topologii ogólnej", w którym pojawia się definicja *przestrzeni topologicznej* jako pary uporządkowanej $(X, \mathcal{T})$ i zaraz potem jest napisane, że X jest przestrzenią, a elementy zbioru X są punktami przestrzeni, co pozwala Autorowi pisać normalnie w ramach sformalizowanego systemu i nie zaprzątać uwagi czytelnika tekstami w rodzaju: x jest punktem pierwszego elementu przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$, co na pewno uradowałoby miłośników *należenia do prostej, długości wysokości* i innych potworków tego rodzaju. Swoją drogą w wielu sytuacjach byłoby lepiej, a na pewno zabawniej mówić o szerokości wysokości lub wysokości wysokości. Warto tu wspomnieć o tym, że ja mogłem będąc uczniem mówić o kole, okręgu o promieniu 5, a teraz już nie wolno, trzeba powiedzieć okrąg o promieniu długości 5, bo ponoć promień to odcinek. Dla większości czynnych matematyków promień kuli to jednak liczba, zwłaszcza w dowolnej przestrzeni metrycznej choćby dlatego, że w przestrzeni odcinków może nie być, a kule są. Zmusza się w ten sposób nauczycieli i uczniów do komplikowania języka, co z nauką nic wspólnego nie ma. Warto wspomnieć o *brzytwie Ockhama:* nie należy mnożyć bytów ponad potrzebę. Dotyczy zarówno definicji jak i przede wszystkim różnych założeń i to nie tylko w matematyce. W szczególności domaganie się, by każde słowo miało jedno i tylko jedno znaczenie jest sprzeczne z tym, jak większość ludzi mówi i pisze. Promień okręgu może być w zależności od kontekstu liczbą lub odcinkiem skoro mogło tak być przez ponad 2000 lat i nikomu to nie szkodziło. W dalszym ciągu np. symbol (nie słowo!) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest dwuznaczny, bo w zależności od kontekstu oznacza on albo szereg, który może być rozbieżny lub zbieżny albo sumę szeregu, jeśli ona istnieje. Nikomu to nie przeszkadza poza jedną osobą, która wykładała matematykę w pewnej wyższej uczelni. Osoba ta (której zapewne nigdy nie spotkałem) napisała książkę, którą zrecenzowałem i zażądałem, by autor nie wprowadzał osobnego oznaczenia na szereg i jego sumę (bo przez 300 lat na całym świecie ten symbol ma dwa znaczenia), a recenzję zakończyłem zdaniem typu: książkę należy wydać, jeśli w … studenci są tak uczeni, ale liczba egzemplarzy nie powinna przekraczać liczby studentów nauczanych przez owego autora.

To, o czym napisałem wyżej to formalistyka, a nie formalizacja. Tego jest więcej w szkołach. Np. w mojej podstawówce pisaliśmy $\frac{5}{6} + \frac{11}{21} = \frac{5\cdot 7 + 11\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 7} = \frac{57}{42} = \frac{19}{14}$, a może od razu $\frac{5}{6} + \frac{11}{21} = \frac{5\cdot 7+11\cdot 2}{42} = \frac{57}{42} = \frac{19}{14}$. Teraz jest o wiele lepiej, bo trzeba pisać, a w każdym razie tak piszą studenci: $\frac{5}{6} + \frac{11}{21} = \frac{5\cdot 21}{6\cdot 21} + \frac{11\cdot 6}{6\cdot 21} = \frac{105}{126} + \frac{66}{126} = \frac{105+66}{126} = \frac{171}{126} = 1\frac{45}{126}$, czasem jeszcze pojawia się równość $1\frac{45}{126} = 1\frac{5}{14}$, ale to u nielicznych, bo skracanie ułamków wyszło z mody – ta uwaga jest skierowana do tych, którzy wierzą w sens „usuwania niewymierności z mianownika”, bo większość młodzieży wierzy w kalkulatory, komputery, a w swoje możliwości trochę mniej, bo tego są przecież uczeni. Jedyny sens tej akurat zabawy widzę w ćwiczeniu przekształcania wyrażeń algebraicznych i to jest pewien pożyteczny formalizm.

Brniemy dalej. W podręczniku do geometrii Zofii Krygowskiej pojawiła się precyzyjna definicja wielościanu. Przeczytałem ją i zrozumiałem. W skrócie i przy użyciu terminów spoza szkoły: wielościan to suma skończenie wielu wielokątów homeomorficzna ze sferą. W podręczniku były cztery strony, bo przecież nie występuje w książce hoemomorfizm, ciągłość i inne pojęcia topologiczne, więc musi je zastąpić jakaś kombinatoryka. Dlaczego nie z torusem, albo z płaszczyzną rzutową? „Przypuszczam”, że chodziło o to, by twierdzenie Eulera o wielościanach zachodziło dla **każdego** wielościanu. To znów formalistyka sprzeczna z tym, co dzieje się w matematyce (poza szkołami). Przecież ludzie szybko zauważyli, gdy już pomyśleli o topologii, że dla torusa $w-k+s=0$, a dla precelka $w-k+s=-2$, ale akurat prof. Krygowskiej spodobało się 2. Przy okazji zapytałem znajomego laureata OM (i OCh) o zrozumienie tej definicji w szkole. Tylko wzruszył ramionami. A teraz jest on matematykiem z prawdziwego zdarzenia, wygłosił odczyt sekcyjny na miedzynarodowym kongresie matematyków, co mi i kilku innym osobom siedzącym w tej sali jakoś się nie przytrafiło.

To taka sama zabawa, jak opowiadanie dzieciom w podstawówkach o liczbach niewymiernych: niezrozumiale i nie wiadomo po co. Jedna z moich córek zapytana (przy zakładaniu butów przed wyjściem do szkoły) o niewymierność liczby $0,333\ldots$ odparła, że ta liczba jest niewymierna. Na pytanie o powód też odpowiedziała: bo ma nieskończone rozwinięcie dziesiętne. Miłośnicy tzw. ścisłości mogą być zachwyceni – coś zrozumiała i myśli, a ja niespecjalnie. Zawraca się dzieciom głowy niewymiernością, a już np. 10^x dla $x \notin \mathbb{Q}$ w większości szkół definiowane nie jest (większość nauczycieli na ogół nic na ten temat nie mówi), a zaraz potem występują takie śmieszne liczby jak $\log 2$, $\log 3$ itp. Może są wymierne wedle speców od szkolnej niewymierności. A może bardzo trudno jest powiedzieć na przykład, że $7^{\sqrt{13}}$ to jedyna taka liczba, że jeśli $k, \ell, p, q \in \mathbb{N}$ oraz $\frac{k}{\ell} < \sqrt{13} < \frac{p}{q}$, to $\sqrt[\ell]{7^k} < 7^{\sqrt{13}} < \sqrt[q]{7^p}$. Ta definicja jest oczywiście trudniejsza od definicji pierwiastka, ale też pewna część uczniów jest w stanie ją pojąć i nawet powtórzyć po tygodniu – sprawdzałem na studentach po podstawowej maturze tuż po rozpoczęciu studiów, a przecież wiadomo, że wakacje nie są okresem, w którym akurat ich matematyczne kompetencje rosną – tak chyba ujmuje ten problemik współczesna dydaktyka. Na zebraniu rzeczoznawców MEN-u, czyli recenzentów podręczników szkolnych, usłyszałem, że jeśli nie powiemy uczniom, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, to nie będą wiedzieć, z czym mają do czynienia, więc ja nie żartuję. Tu akurat należałoby wyjaśnić co najmniej dwie rzeczy: co to jest a^x, gdy $x \notin \mathbb{Q}$ i dlaczego, gdy chcemy mieć potęgi o jakiejś podstawie dla wszystkich rzeczywistych wykładników, to żądamy, aby owa podstawa była dodatnia. Tu nie chodzi o formalistykę, lecz o to by człowiek przynajmniej w podręczniku znalazł definicję i rzeczywiste powody jej ograniczania w sytuacji stosunkowo prostej. Rzecz skomplikowana nie jest, więc jest w zasięgu wielu uczniów. Ograniczanie metodą: tak przyjmujemy, bo będzie ładniej, taki rozkaz wydał aktualnie rządzący maturami lub innymi egzaminami jest dosyć głupie i zniechęcające, na pewno do zastanawiania się nad matematyką. Wiem też, że zdarzają się uczniowie, którym definicji potęgi brakuje, jest ich niewielu, ale są. Formalne definicje występują nie tylko w matematyce, ale matematyka to jedyny przedmiot w szkole, na którym można pokazywać, że są one przydatne i uczyć ich stosowania.

Zabawne bywają tłumaczenia praw znaków ($a(-b) = -ab$). Snute są opowieści, choć prawdziwe wyjaśnienie jest akurat czysto algebraiczne: chcemy by prawa działań na liczbach dodatnich działały również dla liczb ujemnych, a raczej dla wszystkich, którymi zamierzamy operować. Skoro mnożenie ma być rozdzielne względem dodawania, to muszą zachodzić równości $a(-b) + ab = a[(-b) + b] = a \cdot 0 = 0$, zatem $(-ab) + ab = 0 = a(-b) + ab$ i wobec tego $a(-b) = -ab$. Przecież dokładnie dlatego przyjęto tę równość. Podobnie $-(-a) + (-a) = 0$ i $a+(-a) = 0$, więc $a = -(-a)$. Z tych równości wynika, że $(-a)(-b) = ab$. Całe uzasadnienie, formalnie poprawne. Nie mam pojęcia, co złego jest w definiowaniu wyniku działań na liczbach ujemnych z powodów algebraicznych i co zmusza ludzi do wymyślania innych uzasadnień, zresztą nieprawdziwych.

Nie wiem, dlaczego autor podręcznika uważał i zapewne uważa (choć w podręczniku tekst musiał zmienić), że równanie $\cos x + \sin x = 1$ można omawiać metodą *widać z wykresu,* a nie mógł zrozumieć, że naprawdę można rozwiązanie wywnioskować wprost z definicji kosinusa i sinusa oraz nierówności trójkąta. Jego zdaniem uczniowie nie mają szans narysować trójkąta o przeciwprostokatnej 1 i wiadomych przyprostokątnych, a potem zauważyć, że ich suma jest większa od przeciwprostokątnej. W pewnym sensie wierzę mu: ludzie uczeni, że na wszystko dobry jest wzór z tablic egzaminacyjnych, praktycznie nie mają szans ujrzeć w tym zadaniu jakiejkolwiek geometrii, ale gdyby ich uczyć analizy problemu, byłoby z pewnością nie tylko inaczej, ale też lepiej. Jednak niezmiernie rzadko tzw. „normalny nauczyciel" pokazuje jak z definicji można korzystać, a jeszcze rzadziej domaga się tego od swych uczniów. To nie są wnioski z badań przeprowadzanych za pomocą niezwykle mądrych metod, lecz wnioski z rozmów ze studentami. Precyzyjne definicje i ich wykorzystywanie to ważna strona formalizmu, która bywa skuteczna. Niestety stale spotykam studentów, którzy w celu rozwiązania równania $x^2 - 4 = 0$ stosują wzór $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, przy czym duża ich część mówi, że widzi pierwiastki od razu, ale przecież trzeba jakoś to uzasadnić. To akurat z matematyką ma niewiele wspólnego, to raczej jej zaprzeczenie. Na pewno jest to zwycięstwo formalistyki nad zdrowym rozsądkiem. Oznacza to również, że ci studenci nie znają formalnej definicji pierwiastka równania, wiem to nie tylko dlatego, że taki wniosek sam nasuwa się, po wysłuchaniu ich wypowiedzi, ale też stąd, że poproszeni o jej sformułowanie nie potrafią nic sensownego powiedzieć.

Bywają sytuacje, w których autor czegoś się obawia, np. w bardzo dobrym podręczniku do geometrii autorstwa Bolesława Iwaszkiewicza przeprowadzono dowód twierdzenia Talesa nie używając pola, bo ono nie było jeszcze zdefiniowane i chyba panowała moda na unikanie pola, jeśli tylko było to możliwe. W rezultacie rozumowanie było długie i dla zdecydowanej większości uczniów „nie do przełknięcia". Faktycznie autor użył przekrojów Dedekinda. To akurat moim zdaniem było złe rozwiązanie problemu, choć poprawne z formalnego punktu widzenia. Teoretycznie można by spodziewać się, że na studiach (politechniki, ekonomie) dowód nierówności $x < \operatorname{tg} x$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ też odbędzie się bez pola. To jednak nie miało miejsca o ile mi wiadomo, a problem ten sam, przy czym dowód tej nierówności jest łatwiejszy od dowodu twierdzenia Talesa ... Jednak w szkołach i na większości kierunków studiów nie są rozpatrywane zbiory, których długość, pole czy objętość wymaga skomplikowanej definicji. W matematyce takie zbiory pojawiły się, bo badano szeregi Fouriera i inne obiekty, ale to był przełom XIX i XX wieku, więc nic to do programów szkolnych nie powinno mieć. Konstrukcja jakiejkolwiek miary jest potrzebna, gdy pojawiają się odpowiednio skomplikowane obiekty, minimum to np. szereg $\sum \frac{1}{n} z^{2^n}$ wraz z pytaniem: dla jakich liczb zespolonych z jest zbieżny? Prawdopodobnie wszyscy widzą, że jeśli z jest pierwiastkiem 2^k–tego stopnia z 1, to szereg jest rozbieżny, bo od pewnego miejsca jego wyrazy to pokrywają się z wyrazami szeregu harmonicznego. Nieco bardziej trzeba się napracować, by zauważyć, że jeśli $z \neq 1$ jest pierwiastkiem stopnia 3^k oraz $k > 1$, to szereg jest zbieżny. Mamy więc dwa gęste podzbiory okręgu: w punktach jednego z nich szereg jest zbieżny, a w punktach drugiego – rozbieżny: ciąg sum częściowych dąży do ∞, oczywiście do zespolonej nieskończoności. I zaczyna robić się ciekawie. Ale nic takiego nie ma miejsca, gdy mówimy o długości łuku okręgu, polu wycinka koła, objętości stożka, wielościanu. Wobec tego nie ma powodu do celebrowania problemów z definicją miary. Żadnego. Zresztą ścisła definicja miary jest trudniejsza od definicji potęgi o niewymiernym wykładniku.

Chodzi mi o to, by zwalczać jedynie te problemy, które rzeczywiście pojawiają się. We wspomnianym wcześniej podręczniku B. Iwaszkiewicza pojawia się definicja wielościanu, a w każdym razie pamiętam ją z lekcji. Była mowa o powierzchni, która . . . Zapytałem wtedy swą nauczycielkę matematyki o definicję powierzchni. Dowiedziałem się, że tego dowiem się na studiach. Teraz, ponad pół wieku później, uważam, że odpowiedziała dokładnie tak, jak należało: w tym wypadku nie da się porządnie i prosto napisać sensownej definicji, inaczej niż np. w wypadku potęgi o niewymiernym wykładniku, więc nie należy w szkole drążyć tej kwestii, w każdym razie nie w czasie lekcji. Gdyby jednak ktoś zdecydował się na omawianie definicji powierzchni na kółku, to sytuacja zmienia się. Można, ale trzeba to przygotować i jest tu wiele rzeczy do pokazania, w tym różne obiekty geometryczne, które definicja dopuszcza, więc można się bawić modyfikowaniem definicji i oglądać następne zbiory, które mogą stają się powierzchniami.

W życiu też tak bywa. Dopóki nie ma potrzeby ścisłego definiowania pojęcia, nikt poważny definicji podać nie próbuje. Jednak, gdy powstaje potrzeba definicja powstaje. Międzynarodowy Komitet Olimpijski miał problem z płcią Stanisławy Walasiewiczównej (am. Stella Walsh Olson) – wybitnej lekkoatletki, gdy po jej zamordowaniu wyniki sekcji zwłok dowodziły, że była ona „interseksualna”, miała narządy płciowe obu płci, męskie bardzo słabo rozwinięte. Później podobne problemy miała Ewa Kłobukowska, też sprinterka, która miała nie być kobietą z powodu swoich chromosomów, jednak według Wikipedii (wersja angielska i niemiecka) ta niekobieta urodziła syna w 1968 r. . . . Wykształcony człowiek powinien rozumieć, że wprowadzanie ustaw, wedle których kobiety lub mężczyźni coś mogą lub czegoś nie mogą, wymaga uprzedniego zdefiniowania kobiety i mężczyzny, co bywa złożonym problemem nawet na poziomie biologii. Inaczej szanse na jakieś głupie procesy sądowe wzrosną gwałtownie ku zadowoleniu prawników, którzy będą mogli więcej zarabiać.

Oczywiście to tylko przykład możliwych komplikacji spowodowanych trudnościami ze zdefiniowaniem czegoś. Niestety istnieje ich znacznie więcej. Jedną z ról matematyki w szkole jest ich wskazanie i pokazania jak w prostych sytuacjach można pozbyć się kłopotów oraz wskazanie, że czasem uniknięcie problemów związanych z definiowaniem bywa bardzo trudne. Mnożenie przykładów to nie było celem mej opowieści, więc kończę.