Kilka słów o liczbach niewymiernych

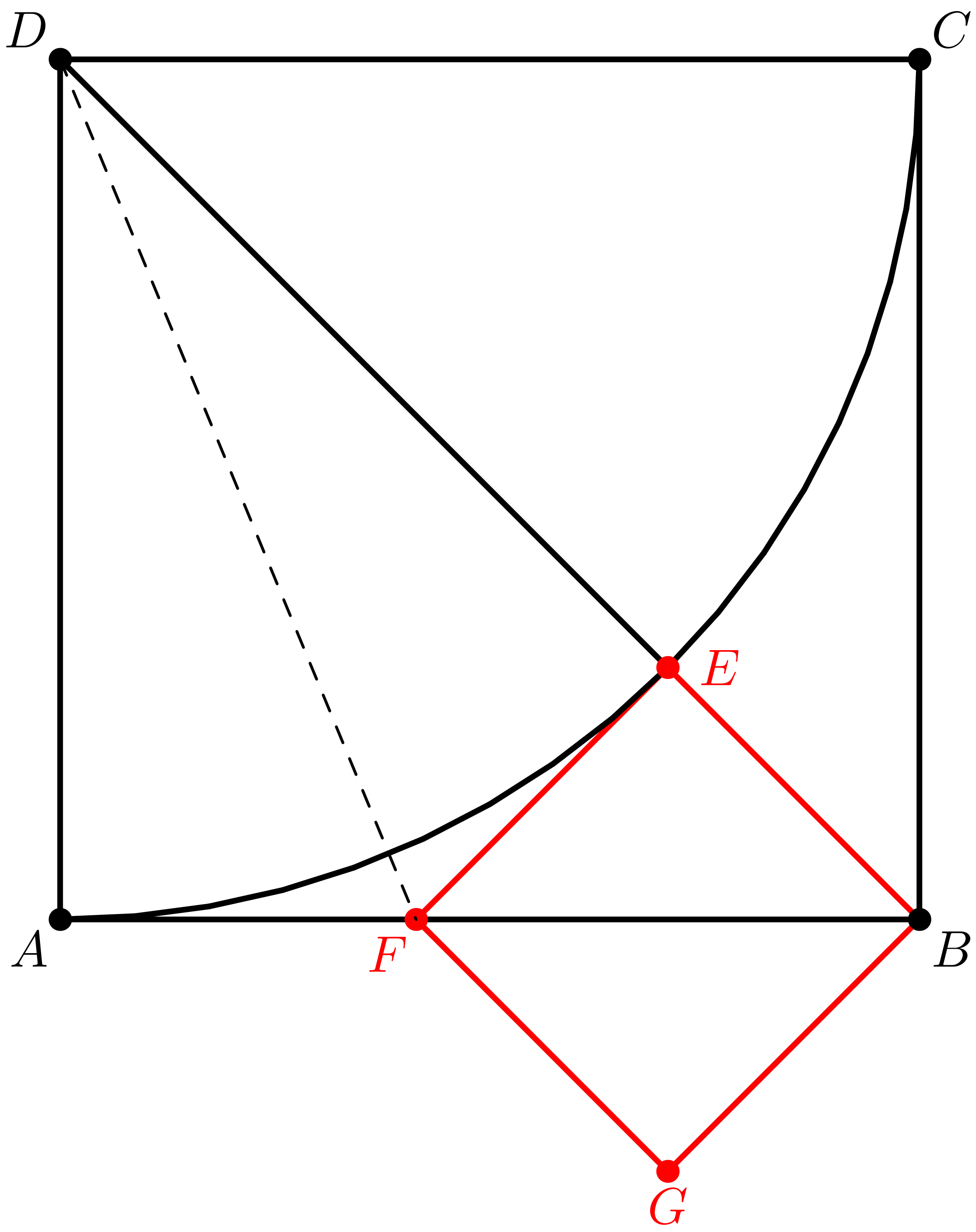
Bardzo dawno temu Pitagoras (569 – 475 p.n.e.) lub któryś z jego uczniów zauważył, że stosunek długości przekątnej kwadratu do długości boku tego kwadratu nie jest liczbą wymierną, czyli nie może być jako iloraz dwu liczb całkowitych. Odkryto więc jakąś prawdę i od tej pory ludzie zaczęli przejmować się tym, czy konkretne liczby są wymierne. 2500 lat temu miało to związek z ówczesnymi wierzeniami w różne rzeczy, więc było bardzo ważne (później ludzie miewali inne problemy w rodzaju co wokół czego krąży i czy to zgadza się z jakimiś tekstami, których kwestionować nie było wolno, albo czy podludzi można mordować, aby nie przeszkadzali nadludziom, czy płód jest człowiekiem, a jeśli jest to od którego momentu). My skupimy się na kwestii wymierności liczb. Otóż z punktu widzenia dzisiejszego użytkownika matematyki, np. inżyniera, ekonomisty, chemika, fizyka–eksperymentatora wymierność liczby żadnego znaczenia nie ma, bo ci ludzie i tak operują przybliżeniami liczb, a każdą liczbę można przybliżać zarówno liczbami wymiernymi jak i niewymiernymi z dowolną dokładnością.

Z jakichś powodów chyba na całym świecie licealiści lub nawet młodsi ludzie są informowani o niewymierności różnych liczb. Rezultaty są na ogół raczej śmieszne zwłaszcza, gdy informacja nie jest poparta dowodem. Niektórzy zapamiętują, że liczby $1,41$; $3,14$; $1,73$ są niewymierne i niestety ci stanowią większość populacji. Niektórzy specjaliści od nauczania twierdzą, że jeśli uczniom w szkołach podstawowych nauczyciel nie powie, że pole koła o promieniu 1 jest liczbą niewymierną, to w ogóle nie będą wiedzieć, czym owo π jest. Usiłowałem dowiedzieć się od takich osób jak to możliwe, że Archimedes bladego pojęcia nie mając o niewymierności π udowodnił wzory na objętość kuli, pole sfery itp. W jakiś sposób W.G. Leibniz uzyskał wzór $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$, choć zmarł w 1716 r., więc 45 lat przed opublikowaniem pierwszego dowodu niewymierności π. Podobnie było z Eulerem, który w 1735 r., mając 27 lat udowodnił, że $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$ Znalezienie wartości tej nieskończonej sumy było problemem, z którym nie dało sobie rady wielu wybitnych matematyków tamtego czasu. Jak widać z tych przykładów nie wszystkim brak informacji o niewymierności liczby π przeszkadzał w jej używaniu.

Moim zdaniem głównym powodem informowania uczniów o niewymierności czegokolwiek powinien był dowód jakiegoś twierdzenia o takich liczbach. Standardowy dowód niewymierności liczby $\sqrt{2}$ jest prosty, choć zdaniem dydaktyków za trudny dla uczniów szkół podstawowych. Oto on. Jeśli $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, przy czym liczby p, q są naturalne, a ułamek $\frac{p}{q}$ – nieskracalny, to z równości $2q^2 = p^2$ wynika od razu, że p jest liczbą parzystą, zatem $p = 2r$ dla pewnej liczby naturalnej r i wobec tego $q^2 = \frac{1}{2} \cdot (2r^2) = 2r^2$. Stąd jednak wynika, że q jest liczbą parzystą, wbrew temu, że liczby p, q są względnie pierwsze.

Podobno tak dowodzili tego starożytni Grecy, choć to dziwne, bo oni wszystko sprowadzali do geometrii. Geometryczne uzasadnienie tego, że bok i przekątna kwadratu są niewspółmierne, czyli że nie istnieje odcinek, którego kopiami niezachodzącym jedna na drugą (z wyjątkiem końców) można pokryć dokładnie zarówno bok jak i przekątna kwadratu polega na pokazaniu, że jeśli byłoby to możliwe, to udałoby się też to z kwadratem o boku ponad dwukrotnie krótszym bez zmiany odcinka, którym mierzymy oba obiekty. Rysunek poniżej wyjaśnia rozumowanie. Punkt E to środek łuku okręgu, którego środkiem jest wierzchołek D rozpatrywanego kwadratu a promieniem odcinek DA. Jeśli istnieje wspólna miara m dla odcinków DA (czyli $DA = q \cdot m$

dla pewnej liczby naturalnej q) i DB (czyli $DB = p \cdot m$ dla pewnej liczby naturalnej p), to odcinkiem m możemy zmierzyć również odcinek EB (wtedy $EB = (p-q)m$). Można też odcinkiem m zmierzyć odcinek $FB = AB - AF = q \cdot m - (p-q) \cdot m = (2q-p) \cdot m$. Ponieważ $AF = FE = EB$ i $FE < FB$, więc $AF < \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DA = \frac{1}{2}DC$. Po zastowaniu tej samej prodecury do kwadratu $BEFG$ otrzymamy jeszcze mniejszy kwadrat itd. To jest niemożliwe, bo w końcu dojdziemy do kwadratu o boku krótszym od m.



$FE \perp BE$, bo styczna do okręgu jest prostopadła do promienia;
$BE = EF$, bo $\sphericalangle EBF = \sphericalangle BFE = 45°$;
$AF = FE$, trójkąty prostokątne DAF i DEF mają wspólną przeciwprostokątną DE i równe przyprostokątne DA, DE.

Podaliśmy dwa dowody niewymierności liczby $\sqrt{2}$, które znajdowały się w podręcznikach do liceum obowiązujących w latach sześćdziesiątych XX w w całej Polsce.

Pierwszy dowód, ten „algebraiczny" można łatwo przepisać tak, że stanie się on dowodem niewymierności pierwiastka dowolnego stopnia z liczby dowolnej liczby naturalnej pod warunkiem, że nie jest liczbą całkowitą. W zasadzie otrzymujemy wtedy dowód następującego twierdzenia:

Jeśli liczby $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz p, q są całkowite,ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny i jest pierwiastkiem równania $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + \ldots + a_nx^n = 0$, to liczba p jest dzielnikiem liczby a_0 zaś liczba q jest dzielnikiem liczby a_n.

Twierdzenie pozwala znajdować wymierne pierwiastki wielomianów o współczynnikach całkowitych. Wynika też z niego wypowiedziane wcześniej twierdzenie o niewymierności niecałkowitych pierwiastków z liczb naturalnych.

Liczba $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ jest niewymierna, bo jej kwadrat równy $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ jest niewymierny, gdyż $\sqrt{6}$ jest niewymierny. Liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ też jest niewymierna, ale w tym wypadku trzeba już wykazać się drobnym pomysłem, bo samo podnoszenie do kwadratu nic nie daje: $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 = 10+2(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15})$ zamiast trzech pierwiastków kwadratowych mamy trzy pierwiastki kwadratowe i dodatkowo liczbę 10. Temu można zaradzić. Niech $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Mamy $x^2-2x\sqrt{2}+2 = 8+2\sqrt{15}$ i $(x^2-6)^2 = (2x\sqrt{2}-2\sqrt{15})^2 = 8x^2-8\sqrt{30}+60$, więc jeśli $x \in \mathbb{Q}$, to $\sqrt{30} = \frac{1}{8}\left(8x^2 + 60 - (x^2 - 6)^2\right)$ jest liczbą wymierną, co nie jest prawdą. Ten dowód już był nieco dłuższy, a można zapytać o wymierność liczby $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ lub $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}+\sqrt{13}+\sqrt{17}$ i wtedy mogą pojawić się większe trudności, które może dać się przewalczyć, ale zapewne nie natychmiast.

Można również jednak w miarę prosto rzecz rozstrzygnąć. Niech $F(a)$ oznacza najmniejszy zbiór zawierający wszystkie liczby ze zbioru F i liczbę a, w którym wykonalne są cztery działania arytmetyczne (dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie). Jeśli $F = \mathbb{Q}$ i $a \in Q$, to $\mathbb{Q}(a) = \mathbb{Q}$. Natomiast $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ jest zbiorem złożonym z liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$. To stwierdzenie jest całkiem oczywiste w wypadku dodawania, odejmowania i mnożenia. Jeśli chodzi o dzielenie, to trzeba zauważyć, że $\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}$ i skorzystać z poprzedniego zdania.

$\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$ składa się z liczb postaci $a + b\sqrt{3}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, więc z liczb postaci $w+x\sqrt{2}+y\sqrt{3}+z\sqrt{6}$. Uzasadnienie jest dokładnie takie samo jak w przypadku $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ z tym, że miejsce $\mathbb{Q}$ zajmuje teraz zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, a miejsce liczby $\sqrt{2}$ liczba $\sqrt{3}$. Czytelnik zechce zauważyć, że $\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,)\big)(\sqrt{3}\,) = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{3}\,)\big)(\sqrt{2}\,)$.

Chcąc udowodnić, że $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}+\sqrt{13}+\sqrt{17} \notin \mathbb{Q}$, warto dowieść prawdziwości twierdzenia ogólniejszego, bo po prostu będzie łatwiej.

Twierdzenie.
Jeśli liczby naturalne $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są parami względnie pierwsze i $\sqrt{a_j} \notin \mathbb{Q}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$, to $\sqrt{a_n} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_{n-1}}\,)$, gdzie

$$\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_{n-1}}\,) = \Big(\ldots\Big(\Big(\big(\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}\,)\big)(\sqrt{a_2}\,)\Big)(\sqrt{a_3}\,)\Big)\ldots\Big)(\sqrt{a_{n-1}}).$$

Rozumować będziemy indukcyjnie. Wykażemy najpierw, że $\sqrt{a_2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}\,)$. Jeśli to nieprawda, to istnieją takie $A, B \in \mathbb{Q}$, że $\sqrt{a_2} = A + B\sqrt{a_1}$. Wtedy $a_2 - A^2 - B^2a_1 = 2AB\sqrt{a_1}$, więc $AB = 0$, bo inaczej $\sqrt{a_1} \in \mathbb{Q}$ wbrew założeniu. Jeśli $B = 0$, to $\sqrt{a_2} \in \mathbb{Q}$, wbrew uczynionemu założeniu. Wobec tego $A = 0$, czyli $\sqrt{a_2} = B\sqrt{a_1}$, zatem $\sqrt{a_2a_1} = Ba_1 \in \mathbb{Q}$. To jest niemożliwe, bo iloczyn względnie pierwszych liczb naturalnych, które kwadratami nie są, kwadratem też nie jest (wykładniki z jakimi niektóre czynniki pierwsze wchodzą w rozkład a_1 są nieparzyste, ale są też równe tym z jakimi te czynniki pierwsze (co najmniej jeden) wchodzą w rozkład liczby a_1a_2, więc ta ostatnia też kwadratem nie jest.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich takich układów parami względnie pierwszych liczb naturalnych $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_{n-1}$, że $\sqrt{\tilde{a}_j} \notin \mathbb{Q}$ dla $j = 1, 2, \ldots$. Załóżmy, że liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są parami względnie pierwsze i że nie są kwadratami liczb wymiernych. Niech $K = \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_{n-2}}) = \big(\ldots\big(\big(\big(\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}\,)\big)(\sqrt{a_2}\,)\big)(\sqrt{a_3}\,)\big)\ldots\big)(\sqrt{a_{n-2}})$.
Jeśli $\sqrt{a_n} \in \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_{n-2}}, \sqrt{a_{n-1}}\,) = K(\sqrt{a_{n-1}}\,)$, to istnieją takie liczby $a, b \in K$, że $\sqrt{a_n} = a + b\sqrt{a_{n-1}}$. Wtedy $2ab\sqrt{a_{n-1}} = a_n - a^2 - b^2 a_{n-1} \in K$. Z założenia indukcyjnego wynika, że $\sqrt{a_{n-1}} \notin K$, a stąd $ab = 0$. Jeśli $b = 0$, to $\sqrt{a_n} = a \in K$ wbrew założeniu indukcyjnemu (teraz $n-1$ liczb to $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_n$). Wobec tego $a = 0$, więc $\sqrt{a_n} = b\sqrt{a_{n-1}}$. Stąd wynika, że $\sqrt{a_n a_{n-1}} = b a_{n-1} \in K$, co też przeczy założeniu indukcyjnemu – tym razem stosujemy je do liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$ i $a_n a_{n-1}$. $\square$

W XVIII wielu ludzie zajmowali się tzw. ułamkami łańcuchowymi. Zaczniemy od przykładu. Mamy
$$\tfrac{141}{100} = 1 + \tfrac{41}{100} = 1 + \frac{1}{2+\frac{18}{41}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{5}{18}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{3}{5}}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{2}{3}}}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}.$$
Jeśli postąpimy podobnie z liczbą wymierną, to jasne jest, że proces w pewnym miejscu zakończy się dokładnie tak, jak stało się to w wypadku ułamka $\frac{141}{100}$. Ale jeśli zajmiemy się liczbą $\sqrt{2}$, to tak się nie stanie. Mamy bowiem
$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)} = 1 + \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}}.$$
Widać, że proces ten można kontynuować w tej chwili dosyć bezmyślnie za to bez ograniczeń. Można więc napisać, że
$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}$ zakładajac, że każdy zrozumie, o co chodzi. Jednak przyjrzymy się przez chwilę kolejnym ułamkom: 1, $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{7}{5}$, $1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}} = \frac{17}{12}$. Można zauważyć, że $1 < \frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$. Co więcej następne dwa ułamki otrzymane w podobny sposób to $\frac{41}{29}$ i $\frac{99}{70}$. Ciąg nierówności wydłuża się: $1 < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$.

Jeśli oznaczymy $1 = \frac{1}{1}\frac{p_0}{q_0}$, $\frac{3}{2} = \frac{p_1}{q_1}$, $\frac{7}{5} = \frac{p_2}{q_2}$, $\frac{17}{12} = \frac{p_3}{q_3}$, $\frac{41}{29} = \frac{p_4}{q_4}$, $\frac{99}{70} = \frac{p_5}{q_5}$ itd., to po pewnym czasie zauważymy, a po jeszcze chwili udowodnimy, że
$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \ldots < \sqrt{2} < \ldots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}\,.$$
Liczbę $\sqrt{2}$ można zastąpić dowolną liczbą dodatnią. Uzasadnienie tego to stosunkowo prosta indukcja. Można też dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość
$$p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{q_n q_{n+1}}\,.$$
Dowód to znów indukcja i znów pomijamy go. Zauważmy jednak, że lewa strona ostatniej równości to z dokładnością do znaku licznik ułamka $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Oznacza to w szczególności, że wartość bezwzględna różnicy między liczbą $\sqrt{2}$ i każdym z tych ułamków jest mniejsza (nie równa) od $\frac{1}{q_n q_{n+1}}$ i oczywięcie dodatnia. Stąd w szczególności wynika, że jeśli liczba $\frac{p}{q}$ leży między $\frac{p_n}{q_n}$ i $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, to $q > q_{n+1}$.

Liczby $\frac{p_0}{q_0}$, $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, $\frac{p_3}{q_2}$, $\ldots$ są więc *najlepszymi przybliżeniami wymiernymi* liczby $\sqrt{2}$ w następpującym znaczeniu: jeśli chcemy znaleźć liczbę znajdującą się bliżej $\sqrt{2}$, to musimy zwiększyć mianownik. Zauważmy też, że $\left|\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$. Te stwierdzenia pozostają w mocy dla każdej liczby dodatniej.

Matematycy zaczęli rozwijać w nieskończone ułamki łańcuchowe najpierw liczby, a potem również funkcje, bo w ten sposób otrzymywano dobre przybliżenia różnych wielkości.

Pokażemy to na przykładzie funkcji tangens. Skorzystamy przy tym z wzorów dowodzonych na studiach, których w tym miejscu uzasadniać nie będziemy:

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$ oraz $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots$.

Z pierwszego z tych wzorów wynika, że $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \frac{x^{10}}{11!} + \ldots$ Oznaczmy

$f_1(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots$ oraz $f_2(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \frac{x^{10}}{11!} + \ldots$

Możemy teraz napisać $\operatorname{tg} x = x \cdot \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{x}{1 + \left(\frac{f_2(x)}{f_1(x)} - 1\right)}$. Dalej możemy napisać

$$f_2(x) - f_1(x) = x^2\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) - x^4\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) + x^6\left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}\right) - x^8\left(\frac{1}{8!} - \frac{1}{9!}\right) + \ldots =$$
$$= x^2 \cdot \frac{2}{3!} - x^4 \cdot \frac{4}{5!} + x^6 \cdot \frac{6}{7!} - x^8 \cdot \frac{8}{9!} + \ldots = \frac{x^2}{3}\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 5} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \ldots\right).$$

Oznaczmy $f_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 5} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \ldots$ i zajmijmy się różnicą $f_3(x) - f_2(x) =$

$$= x^2\left(-\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3!}\right) + x^4\left(\frac{1}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7} - \frac{1}{5!}\right) + x^6\left(\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 7\cdot 9} - \frac{1}{7!}\right) + x^8\left(-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \frac{1}{9!}\right) + \ldots =$$
$$= x^2 \cdot \frac{2}{2\cdot 3\cdot 5} - x^4 \cdot \frac{4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 7} + x^6 \cdot \frac{6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 9} - x^8 \cdot \frac{8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 11} + \ldots =$$

$= \frac{x^2}{3\cdot 5}\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 7} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 7\cdot 9} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \ldots\right)$. Znów oznaczamy $f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 7} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 7\cdot 9} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \ldots$

Powtarzamy procedurę, czyli przekształcamy różnicę $f_4(x) - f_3(x) = x^2\left(-\frac{1}{2\cdot 7} + \frac{1}{2\cdot 5}\right) +$

$+ x^4\left(\frac{1}{2\cdot 4\cdot 7\cdot 9} - \frac{1}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7}\right) + x^6\left(-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\right) + x^8\left(\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13} - \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}\right) + \ldots =$

$= \frac{x^2}{5\cdot 7} - \frac{x^4}{2\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} - \frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13} + \ldots = \frac{x^2}{5\cdot 7}\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 9} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 9\cdot 11} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9\cdot 11\cdot 13} + \ldots\right)$ i definiujemy $f_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 9} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 9\cdot 11} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9\cdot 11\cdot 13} + \ldots$. Potem otrzymujemy równość

$f_5(x) - f_4(x) = \frac{x^2}{7\cdot 9}\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 11} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 11\cdot 13} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 11\cdot 13\cdot 15} + \ldots\right)$ i definiujemy następną funkcję

$f_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 11} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 11\cdot 13} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 11\cdot 13\cdot 15} + \ldots$ Możemy zdefiniować ogólnie

$$f_k(x) = 1 - \frac{x^2}{2\cdot(2k-1)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)} + \ldots =$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)\cdot\ldots\cdot(2k+2n-3)}$$

Wtedy

$$f_{k+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2\cdot(2k+1)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)\cdot(2k+5)} + \ldots.$$

Dla każdego x zachodzi zatem równość

$$f_{k+1}(x) - f_k(x) = \frac{x^2\cdot 2}{2\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)} - \frac{x^4\cdot 4}{2\cdot 4\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)} + \frac{x^6\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)\cdot(2k+5)} - \ldots$$
$$= \frac{x^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)} - \frac{x^4}{2\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)\cdot(2k+5)} - \ldots$$
$$= \frac{x^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)}\left(1 - \frac{x^4}{2\cdot(2k+3)} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot(2k+3)\cdot(2k+5)} - \ldots\right) = \frac{x^2}{(2k-1)(2k+1)} f_{k+2}(x). \qquad \text{(R)}$$

Stąd wynika, że

$$\operatorname{tg} x = x \cdot \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = x \cdot \frac{1}{1+\frac{f_1(x)}{f_2(x)}-1} = x \cdot \frac{1}{1-\frac{x^2}{1\cdot 3}\frac{f_3(x)}{f_2(x)}} = x \cdot \frac{1}{1-\frac{x^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{1}{1+\frac{f_2(x)}{f_3(x)}-1}} =$$

$$= x \cdot \frac{1}{1-\frac{x^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{f_4(x)}{f_3(x)}}} = x \cdot \frac{1}{1-\frac{x^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{1+\frac{f_3(x)}{f_4(x)}-1}}} = x \cdot \frac{1}{1-\frac{x^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{5\cdot 7}\cdot\frac{f_5(x)}{f_4(x)}}}}$$

Prowadzi to, po usprawiedliwieniu przejść granicznych, do równości

$$\operatorname{tg} x = x \cdot \frac{1}{1-\frac{x^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{5\cdot 7}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{7\cdot 9}\cdot\frac{1}{1-\ldots}}}}} = \frac{x}{1-\frac{x^2}{3-\frac{x^2}{5-\frac{x^2}{7-\frac{x^2}{9-\ldots}}}}}$$

Przedstawiliśmy funkcję tangens w postaci ułamka łańcuchowego. Oczywiście pominęliśmy kwestię przejść granicznych, ale troszkę teraz zajmiemy się nimi.

Załóżmy, że k jest tak dużą liczbą naturalną, że $\frac{x^2}{2k-1} < \frac{1}{2}$. Wtedy

$$|f_k(x)-1| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)\cdot\ldots\cdot(2k+2n-3)}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(2k-1)}\cdot\frac{x^2}{(2k+1)}\cdot\frac{x^2}{(2k+3)}\cdot\ldots\cdot\frac{x^2}{(2k+2n-3)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x^2}{2k-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2x^2}{2k-1}$$

Wynika stąd w szczególności, że $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 1$ dla każdego x. W związku z tym możemy powiedzieć, że dla każdego x istnieje takie $k_x \in \mathbb{N}$, że $f_k(x) \neq 0$ dla każdego $k > k_x$. Wobec tego w ciągu $f_1(x), f_2(x), \ldots$ żadne dwa kolejne wyrazy nie są zerami, bo z wzoru

$$\text{(R)} \qquad f_{k+1}(x) - f_k(x) = \frac{x^2}{(2k-1)(2k+1)} f_{k+2)}(x)$$

wynika, że jeśli dwa kolejne wyrazy są zerami, to wszystkie następne też są zerami wbrew temu, że granicą tego ciągu jest 1.

Udowodnimy, że liczba π jest niewymierna.

Lemat (zasadnicza część rozumowania)

Jeśli $x \neq 0$ i $x^2 \in \mathbb{Q}$, to $f_k(x) \neq 0$ i $\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} \notin \mathbb{Q}$ dla $k \in \{1,2,3,\ldots\}$.

Dowód. Niech $x \neq 0$ i $x^2 \in \mathbb{Q}$. Jeśli teza lematu nie jest prawdziwa, to $\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} \in \mathbb{Q}$ **lub** $f_k(x) = 0$ i wtedy $f_{k+1}(x) \neq 0$. Istnieją wtedy takie liczby całkowite a, b i taka liczba $y \neq 0$ (wymierna lub niewymierna), że $f_k(x) = ay$ oraz $f_{k+1}(x) = by$. Nie wykluczamy tego, że $a = 0$ lub $b = 0$. Z wzoru (R) wynika, że wszystkie liczby $f_{k+n}(x)$, $n = 0,1,2,\ldots$ są iloczynami liczby y przez liczby wymierne. Uprościmy rozważania przemnażając liczby $f_{k+n}(x)$ przez odpowiednio dobrane liczby wymierne tak, by po tej akcji stały się one iloczynami liczby y przez liczby całkowite.

Niech $q > 0$ będzie taką liczbą naturalną, że $\frac{q}{2k-1}, \frac{q}{x^2} \in \mathbb{Z}$. Niech

$$G_0(x) = f_k(x) \quad \text{oraz} \quad G_n(x) = \frac{q^n}{(2k-1)(2k+1)\ldots(2k+2n-3)} \cdot f_{k+n}(x) \;\; \text{dla} \;\; n = 1,2,\ldots.$$

Równość $f_{k+n+1}(x) - f_{k+n}(x) = \frac{x^2}{(2k+2n-1)(2k+2n+1)} f_{k+n+2}(x)$ mnożymy przez $\frac{q^{n+2}}{(2k-1)(2k+1)\ldots(2k+2n-3)}$ i otrzymujemy związek:

$$\frac{x^2 q^{n+2} f_{k+n+2}(x)}{(2k-1)(2k+1)\ldots(2k+2n-1)(2k+2n+1)} =$$
$$= \frac{(2k+2n-1)q^{n+2} f_{k+n+1}(x)}{(2k-1)(2k+1)\ldots(2k+2n-1)} - \frac{q^{n+2} f_{k+n}(x)}{(2k-1)(2k+1)\ldots(2k+2n-3)}\,.$$

Mamy więc

$$x^2 G_{n+2}(x) = (2k+2n-1)qG_{n+1}(x) - q^2 G_n(x)$$

czyli

$$G_{n+2} = \frac{(2k+2n-1)q}{x^2}\, G_{n+1}(x) - \frac{q^2}{x^2}\, G_n(x) = \frac{q}{x^2}\Big((2k+2n-1)G_{n+1}(x) - q\, G_n(x)\Big)\,.$$

Współczynniki przy $G_{n+1}(x)$ i $G_n(x)$ w otrzymanym wzorze są całkowite, $G_0(x) = f_k(x) = ay$, $G_1(x) = \frac{q}{2k-1} f_{k+1}(x) = b\frac{q}{2k-1} y$ zatem wszystkie liczby w ciągu $\big(G_n(x)\big)$ są całkowitymi wielokrotnościami liczby $y \neq 0$. Dla dostatecznie dużych n zachodzi $|f_{n+k}(x) - 1| < 1$, więc $0 < |f_{n+k}(x)| < 2$, zatem $0 < |G_n(x)| < \frac{2q^n}{(2k-1)(2k+1)\ldots(2k+2n-3)}$. Prawdziwa jest równość

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{(2k-1)(2k+1)\ldots(2k+2n-3)} = 0\,,$$

bo dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\frac{q}{k+2n-3} < \frac{1}{2}$, a to oznacza, że daleki wyraz ciągu jest mniejszy od połowy swego poprzednika. Wobec tego $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(x) = 0$ – iloczyn ciągu zbieżnego do zera i ograniczonego ma granicę 0. Ciąg całkowitych wielokrotności liczby y różnych od 0 nie jest zbieżny do 0, a oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(x) = 0$. Doszliśmy do sprzeczności. Lemat został wykazany. □

Wniosek 1. $\pi^2 \notin Q$.

Dowód. Załóżmy, że $\pi^2 \in Q$. Mamy $f_1(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, wbrew lematowi. Zakończyliśmy dowód niewymierności π, a nawet π^2. □

Wniosek 2. Jeśli $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, to $\operatorname{tg} x \notin Q$.

Dowód. Z lematu zastosowanego dla $k = 1$ wynika, że liczba $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ nie jest wymierna, więc z wymierności mianownika wynika niewymierność licznika. □

Napiszę też o rozwinięciu liczby e w ułamek łańcuchowy. W odróżnieniu od π rozwinięcie jest znane i proste, tzn. reguła pozwalająca na znajdowanie kolejnych a_n jest nieskomplikowana. Rozpoczniemy od liczby $\frac{e+1}{e-1}$.

Twierdzenie.
$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \ldots}}}}\,.$$

Dowód. Dla $k = 0, 1, 2, \ldots$ przyjmujemy, że $f_k(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n!(2k+2n)!} x^{2n}$. Be trudu można sprawdzić, że zachodzi następujący wzór

$$\text{(R)} \qquad f_k(x) - (4k+2)f_{k+1}(x) = 4x^2 f_{k+2}(x)\,.$$

Uzasadnienie polega na porównaniu współczynników przy x^{2n} po obu stronach tej równości. Z lewej strony mamy

$$\frac{(k+n)!}{n!(2k+2n)!} - (4k+2)\frac{(k+n+1)!}{n!(2k+2n+2)!} = \frac{(k+n)!}{n!(2k+2n)!}\left(1 - \frac{(4k+2)(k+n+1)}{(2k+2n+1)(2k+2n+2)}\right) =$$
$$= \frac{(k+n)!}{n!(2k+2n)!}\cdot\frac{2n}{(2k+2n+1)} = \frac{2(k+n)!}{(n-1)!(2k+2n+1)!}.$$

A z prawej

$$4\frac{(k+n+1)!}{n!(2k+2n+2)!} = 4\frac{(k+n)!(k+n+1)}{n!(2k+2n+1)!(2k+2n+2)} = \frac{2(k+n)!}{(n-1)!(2k+2n+1)!}\,,$$

więc równość (R) ma miejsce.

Zachodzą więc równości $f_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$, $f_1(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} + \ldots\right) = \frac{1}{2x}\left(1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^3}{7!} + \ldots\right) = \frac{1}{4x}\left(e^x - e^{-x}\right)$.
Niech $a_k = \frac{f_k(\frac{1}{2})}{f_{k+1}(\frac{1}{2})}$, w szczególności $a_0 = \frac{e^{1/2}+e^{-1/2}}{e^{1/2}-e^{-1/2}} = \frac{e+1}{e-1}$.

Po podstawieniu $x = \frac{1}{2}$ w równości (R) otrzymujemy $f_k(\frac{1}{2}) - (4k+2)f_{k+1}(\frac{1}{2}) = f_{k+2}(\frac{1}{2})$. Tę równość dzielimy przez $f_{k+1}(\frac{1}{2})$ i widzimy, że $a_k = (4k+2) + \frac{1}{a_{k+1}}$. Liczby $a_0, a_1, \ldots$ są dodatnie. Wobec tego $a_k > 4k+2 > 1$ i $\frac{1}{a_{k+1}} < 1$ dla wszystkich k. Stąd wynika, że $\lfloor a_k \rfloor = 4k+2$, tzn. $4k+2$ jest największą liczbą całkowitą z półprostej $(\infty, a_k]$. Stąd wnioskujemy, że
$\frac{e+1}{e-1} = a_0 = 2 + \frac{1}{a_1} = 2 + \frac{1}{6+\frac{1}{a_2}} = 2 + \frac{1}{6+\frac{1}{10+\frac{1}{a_3}}} = 2 + \frac{1}{6+\frac{1}{10+\frac{1}{14+\frac{1}{a_4}}}} = 2 + \frac{1}{6+\frac{1}{10+\frac{1}{14+\frac{1}{18+\ldots}}}}$.

Z tej równości da się otrzymać przedstawienie liczby e w postaci ułamka łańcuchowego, dokładniej:

Twierdzenie.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\ldots}}}}}}}}$$

Dowód. Niech $P_0 = 2$, $Q_0 = 1$, $P_1 = 3$, $Q_1 = 1$, $P_2 = 8$, $Q_2 = 3$, $P_3 = 11$, $Q_3 = 4$, $P_4 = 19$, $Q_4 = 7$, $P_5 = 87$, $Q_5 = 32$, …tak, że ułamki $\frac{P_0}{Q_0} = 2$, $\frac{P_1}{Q_1} = 2 + \frac{1}{1} = 3$, $\frac{P_2}{Q_2} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{8}{3}$, $\frac{P_3}{Q_3} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}} = \frac{11}{4}$, $\frac{P_4}{Q_4} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = \frac{19}{7}$, $\frac{P_5}{Q_5} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}}} = \frac{87}{32}$, czyli kolejne ułamki otrzymujemy „urywając” nieskończenie długi ułamek na kolejnych miejscach, tzn. na miejscach w których pojawiają się kolejne wyrazy ciągu
$b_0 = 2$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$, $b_4 = 1$, $b_5 = 4$, …
Formalna definicja tego ciągu: $b_0 = 2$, $b_{3k-2} = 1$, $b_{3k-1} = 2k$, $b_{3k} = 1$ dla $k = 1, 2, \ldots$
Udowodnimy, że

$$\text{(k + 2)} \qquad P_{k+2} = b_{k+2}P_{k+1} + P_k \quad \text{i} \quad Q_{k+2} = b_{k+2}Q_{k+1} + Q_k \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Łatwo można zauważyć, że jeśli potraktujemy ułamek $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ jako funkcję b_{k+1} to okaże się ona (po ewentualnych uproszczeniach) ilorazem dwóch wielomianów stopnia mniejszego od 2 (więc równego 1 lub 0), zatem może był zapisana w postaci $\frac{\alpha b_{k+1}+\beta}{\gamma b_{k+1}+\delta}$, gdzie współczynniki $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

zależą od liczb $b_0, b_1, \ldots, b_k$. Ponieważ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}$ i $\lim\limits_{x\to\infty}(b_k+\frac{1}{x})=b_k$, więc $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{P_k}{Q_k}$. Mamy też$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=\frac{\beta}{\delta}$ i $\lim\limits_{x\to 0}(b_{k-1}+\frac{1}{b_k+\frac{1}{x}})=b_{k-1}$, więc $\frac{\beta}{\delta}=\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$. Chcąc obliczyć iloraz $\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}$ należy zastąpić b_{k+1} przez $b_{k+1}+\frac{1}{b_{k+2}}$, co prowadzi do równości

$$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}=\frac{\alpha(b_{k+1}+\frac{1}{b_{k+2}})+\beta}{\gamma(b_{k+1}+\frac{1}{b_{k+2}})+\delta}=\frac{b_{k+2}(\alpha b_{k+1}+\beta)+\alpha}{b_{k+2}(\gamma b_{k+1}+\delta)+\gamma}=\frac{b_{k+2}P_{k+1}+P_k}{b_{k+2}Q_{k+1}+Q_k}\,.$$

Zauważmy, że jeśli oznaczymy przez $\frac{R_k}{S_k}$ ułamki powstałe w taki sam sposób z rozwinięcia $2+\frac{1}{a_1}=2+\frac{1}{6+\frac{1}{a_2}}=2+\frac{1}{6+\frac{1}{10+\frac{1}{a_3}}}=2+\frac{1}{6+\frac{1}{10+\frac{1}{14+\frac{1}{a_4}}}}=2+\frac{1}{6+\frac{1}{10+\frac{1}{14+\frac{1}{18+\ldots}}}}$, to otrzymamy podobne wzory:

[k + 2] $\qquad R_{k+2}=(4(k+2)+2)R_{k+1}+R_k,\ \ S_{k+2}=(4(k+2)+2)S_{k+1}+S_k\,,$

oraz $R_0=2$, $S_0=1$, $R_1=13$, $S_1=6$. Teraz udowodnimy przez indukcję, że

$$R_k=\frac{1}{2}(P_{3k+1}+Q_{3k+1})\quad \text{i}\quad S_k=\frac{1}{2}(P_{3k+1}-Q_{3k+1})$$

dla $k=0,1,\ldots$ Bezpośrednie sprawdzenie przekonuje nas o prawdziwości napisanych wzorów dla $k=0$ i $k=1$. Z wzorów $b_{3k-2}=1$, $b_{3k-1}=2k$, $b_{3k}=1$ oraz (3k+1), (3k), (3k-1), (3k-2), (3k-3) wynikają kolejno równości

$P_{3k+1}\overset{(3k+1)}{=\!=}P_{3k}+P_{3k-1}\overset{(3k)}{=\!=}(P_{3k-1}+P_{3k-2})+P_{3k-1}=2P_{3k-1}+P_{3k-2}\overset{(3k-1)}{=\!=}2(2kP_{3k-2}+P_{3k-3})+$
$+P_{3k-2}=(4k+1)P_{3k-2}+P_{3k-3}+P_{3k-3}\underset{(3k-3)}{\overset{(3k-2)}{=\!=}}(4k+1)P_{3k-2}+(P_{3k-2}-P_{3k-4})+(P_{3k-4}+P_{3k-5})=$
$=(4k+2)P_{3k-2}+P_{3k-5}$, czyli $P_{3k+1}=(4k+2)P_{3k-2}+P_{3k-5}$.

Jasne jest, że również $Q_{3k+1}=(4k+2)Q_{3k-2}+Q_{3k-5}$ – wzory rekurencyjne są takie same.
Załóżmy teraz, że $R_j=\frac{1}{2}(P_{3j+1}+Q_{3j+1})$ dla wszystkich $j<k$, $k\geqslant 2$. Wtedy
$R_{k-1}=\frac{1}{2}(P_{3k-2}+Q_{3k-2})$ i $R_{k-2}=\frac{1}{2}(P_{3k-5}+Q_{3k-5})$. Stąd wynika, że
$R_k\overset{[k]}{=\!=}(4k+2)R_{k-1}+R_{k-2}=\frac{1}{2}\left((4k+2)(P_{3k-2}+Q_{3k-2})+P_{3k-5}+Q_{3k-5}\right)=$
$\qquad=\frac{1}{2}\left((4k+2)P_{3k-2}+P_{3k-5}+(4k+2)Q_{3k-2}+Q_{3k-5}\right)=\frac{1}{2}\left(P_{3k+1}+Q_{3k+1}\right)$,
więc pierwszy z dowodzonych wzorów jest prawdziwy. Dowód wzoru $S_k=\frac{1}{2}\left(P_{3k+1}-Q_{3k+1}\right)$ to to samo rozumowanie z drobną zmianę oznaczeń.

Wiemy, że $1+\frac{2}{e-1}=\frac{e+1}{e-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{R_n}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_{3n+1}+Q_{3n+1}}{P_{3n+1}-Q_{3n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{P_{3n+1}}{Q_{3n+1}}+1}{\frac{P_{3n+1}}{Q_{3n+1}}-1}=1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\frac{P_{3n+1}}{Q_{3n+1}}-1}$, a stąd wynika, że $e=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_{3n+1}}{Q_{3n+1}}$. Udowodniliśmy, że podciąg interesującego nas ciągu ma granicę e. Jednak z definicji ciągu wynikają nierówności:

$$\frac{P_0}{Q_0}<\frac{P_2}{Q_2}<\frac{P_4}{Q_4}<\ldots,\qquad \frac{P_1}{Q_1}>\frac{P_3}{Q_3}>\frac{P_5}{Q_5}>\ldots\ \text{ oraz }\ \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}>\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}.$$

Zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_{3n+1}}{Q_{3n+1}}$, bo te dwa ciągi nieskończenie wiele wspólnych wyrazów, a ciąg rosnący ma granicę, był może nieskończoną, ale dokładnie jedną. Podobnie $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_{3n+1}}{Q_{3n+1}}$. Stąd i z definicji granicy wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}=e$. $\square$

Te rozumowania wymagają pewnej wprawy w przekształcaniu wzorów. Opierałem się na pracy M. . Laczkovicza z American Monthly, vol. 104, No 5, May 1997, pp. 439 – 443 i rosyjskiej książce A.A. Buchsztaba „Teoria liczb” wydanej w Moskwie w 1966 r. Dowód niewymierności π pochodzi od J. Lamberta. Ten dowód Laczkovicz przedstawił używając współczesnej symboliki i terminologii. Liczbę e przedstawił w postaci ułamka łańcuchowego L. Euler. Stąd wywnioskował niewymierność e. W książce Buchsztaba opisane jest to w sposób jasny, współczesny i zwarty.

Analityczne rozwiązania trzech geometrycznych zadań olimpijskich

W LXVIII Olimpiadzie Matematycznej wystartowało 1495 uczennic i uczniów.

Przypomnienia.

1. Wektory $[a, b]$ i $[c, d]$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $ac + bd = 0$ Dla dowodu wystarczy stwierdzić, że w trójkącie o wierzchołkach (a, b), $(0, 0)$ i (c, d) kąt przy wierzchołku $(0, 0)$ jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $(a-0)^2+(b-0)^2+(c-0)^2+(d-0)^2 = (a-c)^2+(b-d)^2$ (twierdzenie Pitagorasa), więc gdy $-2ac - 2bd = 0$, więc gdy $ac + bd = 0$. □

2. Prosta o równaniu $ax + by + c = 0$ jest prostopadła do wektora $[a, b]$. Udowodnimy to. Niech punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) leżą na prostej o równaniu $ax + by + c = 0$. Są wtedy spełnione równości $ax_1+by_1+c = 0$ i $ax_2+by_2+c = 0$. Odejmujemy je stronami: $a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2) = 0$, a to oznacza, że wektory $[a, b]$ i $[x_1 - x_2, y_1 - y_2]$ są prostopadłe, więc prosta $ax + by + c = 0$ jest prostopadła do wektora $[a, b]$. □

Zadanie 5. (nadesłano 863 rozwiązania, w tym 607 poprawnych)

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Symetralna boku AD przecina odcinek BC w punkcie E. Prosta równoległa do prostej AE, przechodząca przez punkt C, przecina odcinek AD w punkcie F. Dowieść, że

$$\sphericalangle AFB = \sphericalangle CFD.$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie analityczne (nieomal bezmyślne), syntetyczne jest na stronie Olimpiady.

Bez straty ogólności można przyjąć, że $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (c, 1)$ i $D = (d, 1)$, gdzie $b, c, d \in \mathbb{R}$. Niech M będzie środkiem odcinka AD. Wtedy $M = \left(\frac{d}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Zaczniemy od napisania równań kilku prostych:

$dx + y = d \cdot \frac{d}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(d^2 + 1)$ — równanie symetralnej odcinka AD

$x + (b - c)y = b$ — równanie prostej BC

$x = dy$ — równanie prostej AD.

Możemy więc znaleźć współrzędne punktu $E = \left(\frac{b+c-bd^2+cd^2}{2(1-bd+cd}, \frac{1-2bd+d^2}{2(1-bd+cd}\right)$. Znalazwszy je możemy napisać równanie prostej równoległej do prostej AE, przechodzącej przez punkt C, czyli prostej CF:

$$(1 - 2bd + d^2)x - (b + c - bd^2 + cd^2)y =$$
$$= (1 - 2bd + d^2) \cdot c - (b + c - bd^2 + cd^2) \cdot 1 = -b - 2bcd + bd^2,$$

a to z kolei pozwala na znalezienie punktu F − wystarczy zastąpić w ostatnim równaniu x przez dy i obliczyć y:

$$-b - 2bcd + bd^2 = (1 - 2bd + d^2)dy - (b + c - bd^2 + cd^2)y = y(d - b - c - bd^2 - cd^2 + d^3) =$$
$$= (1 + d^2)(d - b - c)y,$$

zatem $y = \frac{-b-2bcd+bd^2}{(1+d^2)(d-b-c)}$ i wobec tego $F = \left(\frac{bd(1+2cd-d^2)}{(1+d^2)(b+c-d)}, \frac{b(1+2cd-d^2)}{(1+d^2)(b+c-d)}\right)$.

Możemy teraz wykazać równość kątów korzystając z twierdzenia kosinusów – można obliczyć długości wszystkich odcinków. Postąpimy jednak nieco inaczej: znajdziemy punkt $B' = (u, v)$ symetryczny do punktu B względem prostej AD i sprawdzimy, że leży on na prostej CF. Mają był spełnione równości:

$\frac{1}{2}(u+b) = d \cdot \frac{1}{2}(v+0)$ (środek odcinka BB' leży na prostej AD) oraz
$du + v = bd$ (B' leży na prostopadłej do AD przechodzącej przez B).
Wobec tego $d(dv-b)+v = bd$, zatem $v = \frac{2bd}{1+d^2}$ i $u = dv - b = \frac{b(d^2-1)}{d^2+1}$. Przekształcamy:
$(1-2bd+d^2)\frac{b(d^2-1)}{d^2+1} - (b+c-bd^2+cd^2)\frac{2bd}{1+d^2} =$
$= \frac{b}{1+d^2}\big((1-2bd+d^2)(d^2-1) - 2d(b+c-bd^2+cd^2)\big) =$
$= \frac{b}{1+d^2}\big(-1-2cd-2cd^3+d^4\big) = \frac{b}{1+d^2}\cdot(1+d^2)(-1+d^2-2cd) = -b-2bcd+bd^2$, więc punkt B' leży na prostej CF.

Zadanie 11 (nadesłano 390 rozwiązań, w tym 186 poprawnych)

Odcinek AD jest wysokością trójkąta ostrokątnego ABC. W trójkącie ABC wysokość opuszczona z punktu A przecina prostą BC w punkcie D. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AB, a punkt F jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AC. Punkt M jest środkiem odcinka AB, a N — środkiem odcinka AC. Proste MF, EN przecinają się w punkcie S. Dowieść, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej SD.

Rozwiązanie

Bez straty ogólności można przyjąć, że wierzchołkami trójkąta są punkty $A=(0,2)$, $B=(2b,0)$ i $C=(2c,0)$, przy czym $b<0<c$. Wtedy $D=(0,0)$. Równanie prostej AB wygląda tak: $x+by=2b$, zatem równanie prostej DE — tak: $bx-y=0$. Niech $E=(x_E,y_E)$. Rozwiązując układ równań otrzymujemy $x_E = \frac{2b}{1+b^2}$ oraz $y_E = bx_E = \frac{2b^2}{1+b^2}$, czyli $E = \left(\frac{2b}{1+b^2}, \frac{2b^2}{1+b^2}\right)$. Tak samo stwierdzamy, że $F = \left(\frac{2c}{1+c^2}, \frac{2c^2}{1+c^2}\right)$. Oczywiście $M=(b,1)$ oraz $N=(c,1)$. Równanie prostych MF i NE wyglądają więc tak:

$\left(1-\frac{2c^2}{1+c^2}\right)x + \left(\frac{2c}{1+c^2}-b\right)y = \left(1-\frac{2c^2}{1+c^2}\right)b + \left(\frac{2c}{1+c^2}-b\right) = \frac{2c(1-bc)}{1+c^2}$,
$\left(1-\frac{2b^2}{1+b^2}\right)x + \left(\frac{2b}{1+b^2}-c\right)y = \left(1-\frac{2b^2}{1+b^2}\right)c + \left(\frac{2b}{1+b^2}-c\right) = \frac{2b(1-bc)}{1+b^2}$, czyli
$(1-c^2)\,x + (2c-b-bc^2)\,y = 2c(1-bc)$ oraz
$(1-b^2)\,x + (2b-c-b^2c)\,y = 2b(1-bc)$.

Odejmując od pierwszego z nich pomnożonego przez b drugie pomnożone przez c otrzymujemy
$$0 = (b-bc^2-c+b^2c)\,x + (c^2-b^2)\,y = (b-c)(1+bc)x - (b-c)(b+c)y =$$
$$= (b-c)\big((1+bc)x-(b+c)y\big),$$
zatem współrzędne punktu S spełniają równanie $(1+bc)x-(b+c)y=0$ – jest to równanie prostej, bo jeśli $b=-1$ i jednocześnie $c=1$, to kąt BAC jest prosty wbrew założeniu. Ponieważ oba punkty D i S leżą na tej prostej, więc jest to równanie prostej DS.

Równania symetralnych odcinków AB i AC to $-bx+y=1-b^2$ i $-cx+y=1-c^2$. Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy kolejno $(c-b)x=c^2-b^2$, $x=b+c$ i wreszcie $y=1-b^2+b(b+c)=1+bc$.

Jasne jest, że punkt $(b+c,1+bc)$ leży na prostej o równaniu $(1+bc)x-(b+c)y=0$, czyli na prostej DS. Dowód został zakończony. □

Napisałem te dwa rozwiązania, bo zwłaszcza w przypadku zadania 11. wpłynęło mało prac, co zapewne oznacza, że było one trudne dla większości uczestników. Chciałem pokazać, że człowiek nie musi znać żadnych sztuczek, czasem wystarczy trochę obliczeń i to bez żadnych pomysłów. Nie zawsze tak jest, ale gdy w zadaniu występują jedynie proste przechodzące przez jakieś punkty, proste prostopadłe, to należy spodziewać się, że wszystko wyjdzie po niezbyt długich obliczeniach. Tu okazało się, że również niezbyt skomplikowanych.

Zadanie 5 z finału LXVII OM (rozwiązało 9 spośród 154 finalistów)

Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC, w którym $AB = AC$. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu M na bok AB. Okrąg ω jest wpisany w trójkąt ACD i styczny do odcinków AD i AC odpowiednio w punktach K i L. Proste styczne do ω przechodzące przez M przecinają prostą KL w punktach X i Y, przy czym punkty X, K, L, Y leżą w tej kolejności na prostej KL. Udowodnić, że punkty M, D, X, Y leżą na jednym okręgu.

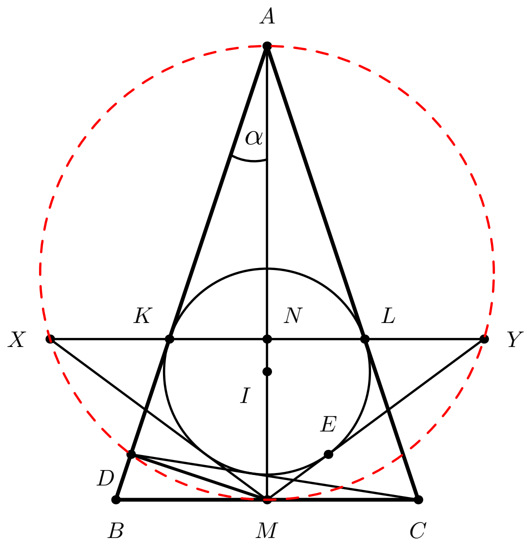
Rozwiązanie

Zadanie wymagało pewnego pomysłu, więc liczba poprawnych rozwiązań jest mała. Z tych dziewięciu osób co najmniej jedna po prostu przeliczyła i jakoś wyszło. Pokażę swoje obliczenia. Użyję równań prostych i podobieństwa trójkątów prostokątnych (niby trygonometrii).

Bez straty ogólności rozważań możemy przyjąć, że $A = (0, a)$ dla pewnej liczby $a > 0$, $B = (-1, 0)$ i $C = (1, 0)$. Wtedy $M = (0, 0)$. Równanie prostej AB to $ax - y = -a$, a prostej MD, prostopadłej do AB, to $x + ay = 0$. Ich punkt wspólny znajdujemy mnożąc równanie prostej AB przez a i dodając do równania prostej MD. Otrzymujemy $(1 + a^2)x = -a^2$, zatem $x = \frac{-a^2}{1+a^2}$ i w konsekwencji $y = -\frac{x}{a} = \frac{a}{1+a^2}$, czyli $D = \left(\frac{-a^2}{1+a^2}, \frac{a}{1+a^2}\right)$. Stąd otrzymujemy $CD = \sqrt{\left(\frac{-a^2}{1+a^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{a}{1+a^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+5a^2+4a^4}{(1+a^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1+a^2)(1+4a^2)}{(1+a^2)^2}} = \sqrt{\frac{1+4a^2}{1+a^2}}$ oraz
$AD = \sqrt{\left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)^2 + \left(a - \frac{a}{1+a^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^4+a^6}{(1+a^2)^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}}$.

Z twierdzenia o równości odcinków stycznych do okręgu poprowadzonych z jednego punktu wynika, że
$AK = AL = \frac{1}{2}(AC + AD - CD) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}} - \sqrt{\frac{1+4a^2}{1+a^2}}\right) = \frac{1+2a^2-\sqrt{1+4a^2}}{2\sqrt{1+a^2}}$.

Niech $\alpha = \sphericalangle BAM$. Wtedy $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$, $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$. Niech I oznacza środek okręgu ω, a r – jego promień. Możemy teraz napisać równości



$r = IK = AK \operatorname{tg}\alpha = \frac{1+2a^2-\sqrt{1+4a^2}}{2a\sqrt{1+a^2}}$,
$AI = \frac{AK}{\cos\alpha} = \frac{1+2a^2-\sqrt{1+4a^2}}{2a}$,
$MI = a - \frac{1+2a^2-\sqrt{1+4a^2}}{2a} = \frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2a}$
$AN = AK\cos\alpha = \frac{a(1+2a^2-\sqrt{1+4a^2})}{2(1+a^2)}$, gdzie N oznacza punkt wspólny prostych AD i KL,
$MN = AM - AN = a - \frac{a(1+2a^2-\sqrt{1+4a^2})}{2(1+a^2)} = \frac{a(1+\sqrt{1+4a^2})}{2(1+a^2)}$.
Niech E oznacza jedyny punkt wspólny okręgu ω i prostej MY. Wtedy $r = IE$ oraz
$ME = \sqrt{MI^2 - r^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2a}\right)^2 - \left(\frac{1+2a^2-\sqrt{1+4a^2}}{2a\sqrt{1+a^2}}\right)^2} =$
$= \frac{\sqrt{(2+4a^2)(1+a^2)-2(1+a^2)\sqrt{1+4a^2}-(1+2a^2)^2-(1+4a^2)+2(1+2a^2)\sqrt{1+4a^2}}}{2a\sqrt{1+a^2}} = \frac{\sqrt{2(-1+\sqrt{1+4a^2})}}{2\sqrt{1+a^2}}$. Ponieważ trójkąty

IME i YMN są podobne (prostokątne, wspólny kąt ostry), więc $\frac{IE}{ME} = \frac{YN}{MN}$, zatem $YN = MN\frac{IE}{ME} = \frac{a(1+\sqrt{1+4a^2})}{2(1+a^2)} \frac{1+2a^2-\sqrt{1+4a^2}}{2a\sqrt{1+a^2}} \frac{2\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{2(-1+\sqrt{1+4a^2})}} = \frac{(1+\sqrt{1+4a^2})(1+2a^2-\sqrt{1+4a^2})}{2(1+a^2)\sqrt{2(-1+\sqrt{1+4a^2})}} =$
$= \frac{a^2(-1+\sqrt{1+4a^2})}{(1+a^2)\sqrt{2(-1+\sqrt{1+4a^2})}} = \frac{a^2\sqrt{-1+\sqrt{1+4a^2}}}{(1+a^2)\sqrt{2}}$ i wobec tego $Y = \left(\frac{a^2\sqrt{-1+\sqrt{1+4a^2}}}{(1+a^2)\sqrt{2}}, \frac{a(1+\sqrt{1+4a^2})}{2(1+a^2)}\right)$.

Jeśli punkty M, D, X, Y leżą na jednym okręgu, to przez środek tego okręgu przechodzą symetralne odcinków XY i MD. Ta pierwsza to oczywiście oś OY, więc ma równanie $x = 0$. Równanie tej drugiej to $-ax+y = (-a)\frac{-a^2}{2(1+a^2)} + \frac{a}{2(1+a^2)} = \frac{a}{2}$. Wobec tego środkiem tego okręgu musi był punkt $S = \left(0, \frac{a}{2}\right)$, przy czym wiemy już, że $SX = SY$ i $SM = SD$. Wystarczy dowieść, że $SY = SM$, by zakończyć dowód. Oczywięcie $SM = \frac{a}{2}$. Mamy też $SY^2 = \left(\frac{a^2\sqrt{-1+\sqrt{1+4a^2}}}{(1+a^2)\sqrt{2}}\right)^2 +$
$\left(\frac{a(1+\sqrt{1+4a^2})}{2(1+a^2)} - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2\sqrt{-1+\sqrt{1+4a^2}}}{(1+a^2)\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a(-a^2+\sqrt{1+4a^2})}{2(1+a^2)}\right)^2 =$
$= \frac{2a^4(-1+\sqrt{1+4a^2})+a^2(a^4-2a^2\sqrt{1+4a^2}+1+4a^2)}{4(1+a^2)^2} = \frac{-2a^4+a^2(a^4+1+4a^2)}{4(1+a^2)^2} = \frac{a^2(1+a^2)^2}{4(1+a^2)^2} = \frac{a^2}{4}$, co kończy ten dowód. $\square$

Było więc trochę obliczeń, ale zadanie zostało rozwiązane. Wymagało to pewnej dyscypliny i porządku, ale za to właściwie żadnych pomysłów tu nie było. Warto zauważyć, że ponieważ środkiem okręgu przechodzącego przez punkty X, D, M, Y okazać się środek odcinka AM, więc również punkt A leży na tym okręgu a trójkąty AMY i ADM są prostokątne (założyliśmy zresztą na wstępie, że $MD \perp AB$).