Zadanie 11 z zawodów I stopnia bieżącej OM

Odcinek AD jest wysokością trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AB, a punkt F jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AC. Punkt M jest środkiem odcinka AB, a N — środkiem odcinka AC. Proste MF, EN przecinają się w punkcie S. Dowieść, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej SD.

Autorzy zadania: Dominik Burek i Tomasz Cieśla

Rozwiązanie

Ponieważ w zadaniu występują w zasadzie jedynie proste lub odcinki, proste do nich prostopadłe i proste przechodzące przez dwa punkty, więc najpierw zadanie rozwiążemy analitycznie.

Bez straty ogólności można przyjąć, że wierzchołkami trójkąta są punkty $A=(0,2)$, $B=(2b,0)$ oraz $C=(2c,0)$ i $b<0<c$. Wtedy $D=(0,0)$. Równanie prostej AB wygląda tak: $x+by=2b$, zatem równanie prostej DE tak: $bx-y=0$. Niech $E=(x_E,y_E)$. Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy $x_E=\frac{2b}{1+b^2}$, $y_E=bx_E=\frac{2b^2}{1+b^2}$, czyli $E=\left(\frac{2b}{1+b^2},\frac{2b^2}{1+b^2}\right)$. Podobnie uzasadniamy, że $F=\left(\frac{2c}{1+c^2},\frac{2c^2}{1+c^2}\right)$. Zachodzą też równości $M=(b,1)$ i $N=(c,1)$. Równania prostych MF i NE wyglądają więc tak:

$$y=\frac{\frac{2c^2}{1+c^2}-1}{\frac{2c}{1+c^2}-b}(x-b)+1=\frac{c^2-1}{2c-b(1+c^2)}(x-b)+1\,.$$

$$y=\frac{\frac{2b^2}{1+b^2}-1}{\frac{2b}{1+b^2}-c}(x-c)+1=\frac{b^2-1}{2b-c(1+b^2)}(x-c)+1\,.$$

Można przepisać je w postaci:

$$(c^2-1)x+(b+bc^2-2c)y=b(c^2-1)+b(1+c^2)-2c=2c(bc-1),$$
$$(b^2-1)x+(c+b^2c-2b)y=c(b^2-1)+c(1+b^2)-2b=2b(bc-1).$$

Odejmując od pierwszego pomnożonego przez b drugie pomnożone przez c otrzymujemy równość

$$0=x(bc^2-b-b^2c+c)+y(b^2+b^2c^2-2bc-c^2-b^2c^2+2bc)=$$
$$=(c-b)(bc+1)x+(b^2-c^2)y=(c-b)\big((bc+1)x-(b+c)y\big),$$

zatem współrzędne punktu S spełniają równanie

$$(S)\qquad (bc+1)x-(b+c)y=0.$$

Jest to równanie prostej, jeśli $bc+1\neq 0$ lub $b+c\neq 0$, czyli gdy $b\neq -1$ lub $c\neq 1$, ale tak jest, bo $\sphericalangle BAC\neq 90^\circ$, więc $bc+1\neq 0$.

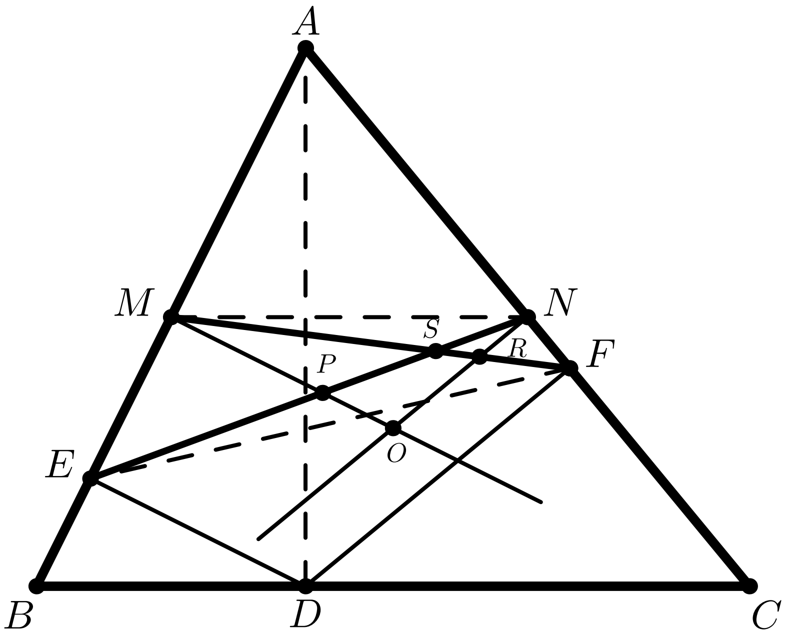
Równaniem symetralnej odcinka AB jest $bx-y=b^2-1$, a symetralnej odcinka AC: $cx-y=c^2-1$. Współrzędne punktu O, czyli środka okręgu opisanego na trójkącie ABC, spełniają więc równanie

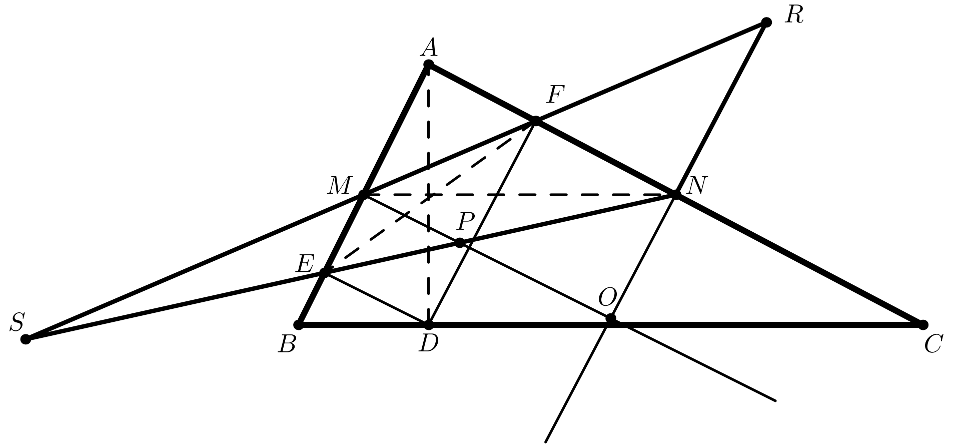
$$0=\big(b(c^2-1)-c(b^2-1)\big)x+\big(b^2-1-(c^2-1)\big)y=(c-b)\big((1+bc)x-(b+c)y\big),\text{ czyli}$$
$$(1+bc)x-(b+c)y=0.$$

Otrzymaliśmy znów równanie (S), a ponieważ $D=(0,0)$, więc punkty D,S,O leżą na prostej o równaniu (S). Dowód został zakończony. □

Drugie rozwiązanie

Niech P oznacza punkt wspólny prostych MO i EN a R punkt wspólny prostych NO i FM. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $\sphericalangle DAB\leqslant\sphericalangle DAC$, więc $\sphericalangle DAB\leqslant\frac{\sphericalangle DAB+\sphericalangle DAC}{2}=\frac{\sphericalangle BAC}{2}<45^\circ$. Punkt E leży więc między punktami B i M. Zachodzi równość $\sphericalangle ADF=\sphericalangle DCA$, bo $\sphericalangle ADF+\sphericalangle FAD=90^\circ=\sphericalangle DCA+\sphericalangle FAD$. Podobnie $\sphericalangle ADE=\sphericalangle DBA$.



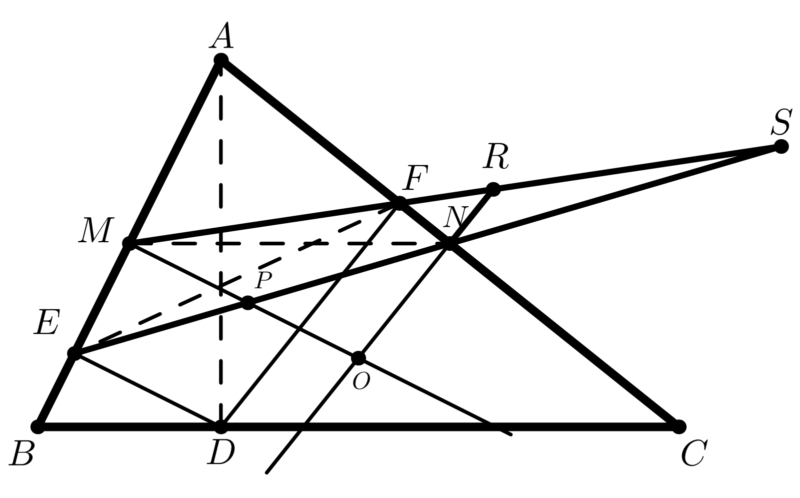


Punkty A, E, D i F leżą na okręgu o średnicy AD. Wobec tego $\sphericalangle AEF = \sphericalangle ADF = \sphericalangle DCA$ oraz $\sphericalangle AFE = \sphericalangle ADE = \sphericalangle DBA$. Proste MN i BC są równoległe, więc $\sphericalangle AMN = \sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle ANM = \sphericalangle ACB$. Jeśli $F = N$, czyli $\sphericalangle DAC = 45°$, to $S = N = F$ a prosta DS jest symetralną odcinka AC, więc na niej leży punkt O i teza jest spełniona.

Dalej $N \neq F$. Jeśli punkt F leży między punktami N i C, to

$$\sphericalangle EMN + \sphericalangle EFN = 180° - \sphericalangle AMN + \sphericalangle EFA = 180°,$$

więc na czworokącie $MNEF$ można opisać okrąg. Jeśli punkt F leży na odcinku NA, to zachodzą równości $\sphericalangle MEF = \sphericalangle AEF = \sphericalangle BCA = \sphericalangle MNA$, a stąd wynika, że na czworokącie $MENF$ można opisać okrąg.



Z tego, że przez punkty N, M, E i F przechodzi okrąg wynika równość $\sphericalangle EMS = \sphericalangle FNS$, a z niej, przez odjęcie lub dodanie kąta prostego, równość $\sphericalangle PMS = \sphericalangle RNS$. Jeśli $\sphericalangle PMS = \sphericalangle RNS = 0°$, to prosta SM jest symetralną odcinka AB a prosta SN — symetralną odcinka AC i wtedy $O = S$, więc twierdzenie jest prawdziwe. Dalej zakładamy, że $\sphericalangle PMS = \sphericalangle RNS \neq 0°$. Trójkąty SMP i SNR są podobne, bo ich odpowiednie kąty są równe. Podobne są również trójkąty SMN i SEF. Wobec tego $\frac{SR}{SP} = \frac{SN}{SM} = \frac{SF}{SE}$. Jednokładność w skali $\frac{SE}{SP} = \frac{SF}{SR}$ względem punktu S przekształca więc punkt P na punkt E, punkt R na punkt F, prostą PO na równoległą do niej przechodzącą przez punkt E, czyli na prostą ED, prostą OR na prostą DF. Wobec tego punkt wspólny prostych PO i RO, czyli punkt O przechodzi na punkt wspólny prostych ED i FD, więc na punkt D, co dowodzi współliniowości punktów D, O i S.

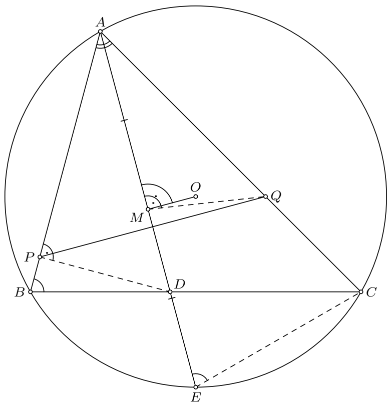
Zadanie 2 z zawodów II stopnia bieżącej OM

W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na proste AB i AC. Dowieść, że pole trójkąta APQ jest równe polu czworokąta $BCQP$ wtedy i tylko wtedy, gdy środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej PQ.

autor Dominik Burek

Rozwiazanie

Sposób I: Załóżmy, że prosta AD przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie E i oznaczmy przez M środek odcinka AE (rys. 1). Pole czworokąta $BCQP$ jest równe polu trójkąta APQ wtedy i tylko wtedy,



rys. 1

gdy pole trójkąta APQ stanowi połowę pola trójkąta ABC. Korzystając ze wzoru na pole trójkąta dostajemy równość

$$\frac{1}{2}AP \cdot AQ \cdot \sin \sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \sphericalangle BAC$$

lub równoważnie $2AP \cdot AQ = AB \cdot AC$.

Trójkąty ABD i AEC są podobne, gdyż $\sphericalangle CBA = \sphericalangle CEA$ oraz $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC$. Wobec tego

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC},$$

więc $2AP \cdot AQ = AD \cdot AE$.

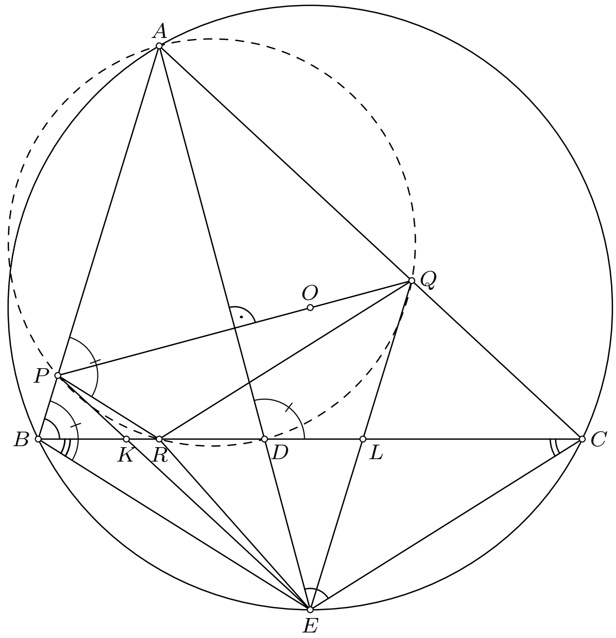
Ponieważ $AM = ME$, to $AP \cdot AQ = AD \cdot AM$, stąd

$$\frac{AM}{AQ} = \frac{AP}{AD}. \tag{1}$$

Łącząc (1) z równością $\sphericalangle PAD = \sphericalangle MAQ$, uzyskujemy podobieństwo trójkątów APD i AMQ. W szczególności $\sphericalangle QMA = 90°$ — co jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy punkt O leży na prostej PQ. □

Sposób II: Niech E będzie punktem przecięcia prostej AD z okręgiem opisanym na trójkącie ABC, którego środkiem jest punkt O. Ponieważ prosta AE jest dwusieczną kąta BAC to punkty P i Q są symetryczne względem AE, a więc czworokąt $APEQ$ jest deltoidem. Skoro $AO = OE$, to czworokąt ten jest rombem wtedy i tylko wtedy, gdy punkt O leży na prostej PQ.

Z równości $\sphericalangle DPA = \sphericalangle AQD = 90°$ wynika, że na czworokącie $APDQ$ można opisać okrąg. Drugi punkt przecięcia tego okręgu z prostą BC oznaczmy przez R. Niech K i L oznaczają punkt przecięcia prostej BC z prostymi odpowiednio PE i QE (rys. 2). Zauważmy, że



Rysunek 1: *
rys. 2

$$\sphericalangle EBA = \sphericalangle DBA + \sphericalangle EBC = \sphericalangle CEA + \sphericalangle DCE = \sphericalangle ADC = 180° - \sphericalangle ADR = \sphericalangle RPA,$$

więc czworokąt $PBER$ jest trapezem. Analogicznie dowodzimy, że czworokąt $RECQ$ jest trapezem. Wynika stąd, że punkt R leży między punktami K i L.

Pola trójkątów PBR i PER są równe, gdyż trójkąty te mają wspólną podstawę PR i równe wysokości opuszczone na PR. Wobec tego pola trójkątów PBK i RKE też są równe. Podobnie, pola trójkątów REL i QLC są równe. Zatem

$$\begin{aligned}[APEQ] &= [APKLQ] + [KED] + [DEL] = [APKLQ] + [RKE] + [REL] = \\ &= [APKLQ] + [PBK] + [QLC] = [ABC],\end{aligned}$$

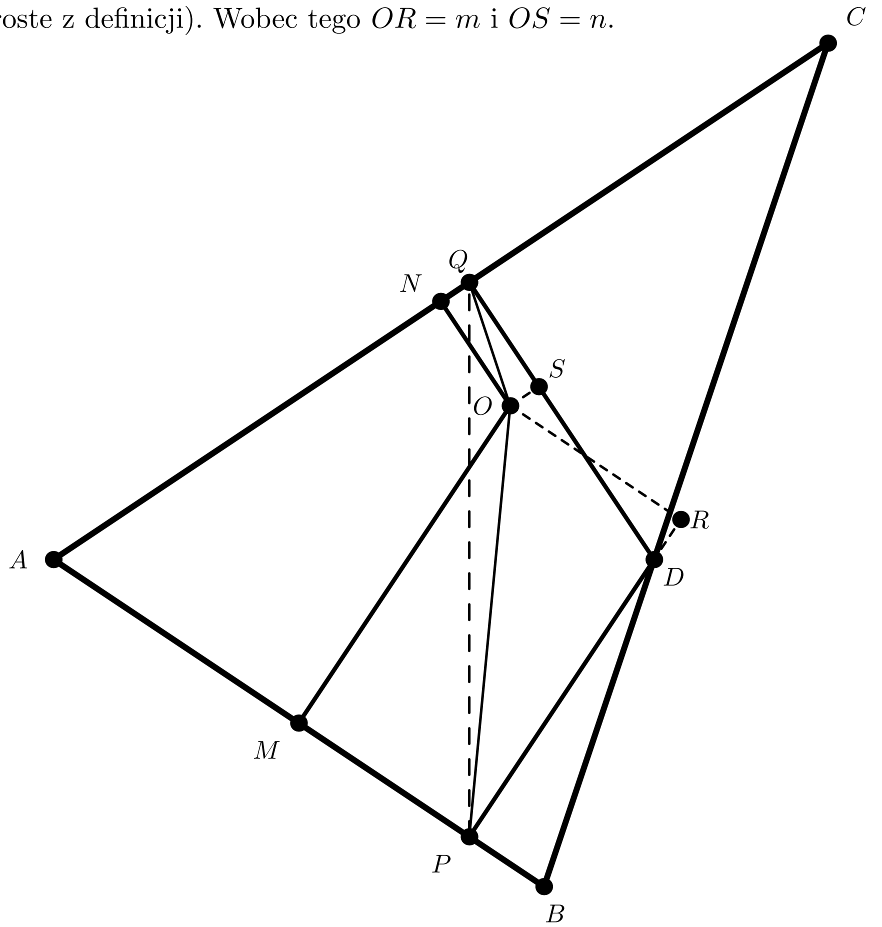
gdzie symbolem $[\mathcal{F}]$ oznaczyliśmy pole figury $\mathcal{F}$.

Z tego rozumowania wynika, że $[BCQP] = [APQ] \iff [APQ] = \frac{1}{2}[ABC] \iff [APQ] = \frac{1}{2}[APEQ]$, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt $AQEP$ jest rombem. □

To są rozwiązania firmowe tego zadania przedstawione przez autora zadania. Czas na to, co pokazała część młodzieży. Zacznę od tego, co napisała licealistka z Katowic, z pierwszej klasy.

Rozwiązanie trzecie

Niech M, N oznaczają środki boków AB i AC, a O — środek okręgu opisanego na trójkącie ABC. Literami a, b, c oznaczamy boki trójkąta leżące naprzeciwko boków BC, CA i AB, a literami m, n długości odcinków PM i QN, zaś literą d odległość punktu D od prostej AB. Ta ostatnia jest równa odległości punktu D od prostej AC, bo AD jest dwusieczną kąta $\sphericalangle BAC$. Oznaczmy jeszcze przez R, S rzut prostokątne punktu O na proste PD i DQ. Wtedy czworokąty $PROM$ i $QNOS$ są prostokątami (po trzy kąty proste z definicji). Wobec tego $OR = m$ i $OS = n$.



Otrzymujemy równości:

$$[BCQOP] = [BDP] + [CQD] + [QNOD] + [DQO] + [DOP] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(d\left(\tfrac{c}{2} - m\right) + d\left(\tfrac{b}{2} - n\right) + dn + dm\right) = \tfrac{1}{4}d(b+c) \quad \text{oraz}$$

$$[ABC] = [ABD] + [CAD] = \tfrac{1}{2}bd + \tfrac{1}{2}cd = \tfrac{1}{2}d(b+c),$$

więc pole figury $BCQOP$ jest połową pola trójkąta ABC. Jasne jest, że pole figury $APOQ$ też jest połową pola trójkąta AC oraz że figura $APOQ$ pokrywa się z trójkątem APQ wtedy i tylko wtedy, gdy punkt O leży na odcinku PQ. □

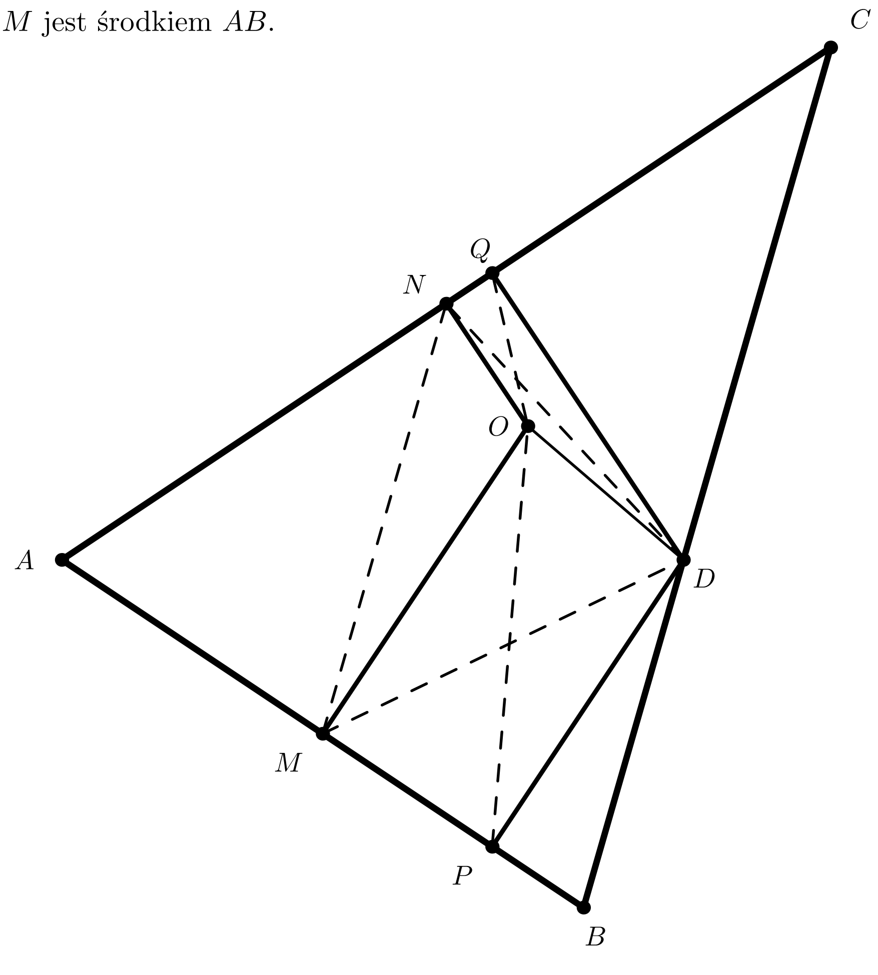
To rozwiązanie bardzo spodobało się weryfikatorom. Osoba sprawdzająca je w Katowicach też uznała, że jest warte 6 p. Mi też bardzo się ono podoba, ale należałoby nieco dokładniej przeanalizować sytuację. Na rysunku punkt O znalazł się w czworokącie $APDQ$. Czytelnik zechce zastanowić się, czy tak być musi, a jeśli nie, to co wtedy należy napisać.

Kilka osób, w tym uczniowie goszczącego nas LO, uznało, że autorzy zadania niepotrzebnie założyli, że odcinek AD jest dwusieczną kąta BAC. Im wystarczało, że punkt D leży wewnątrz odcinka BC. Mieli rację, ale jedna z osób oceniających te prace uznała je za nic nie warte właśnie z powodu niewykorzystania założenia, że D to spodek dwusiecznej. Rozumowania wyglądały mniej więcej tak (w zasadzie przepisuję rozwiązanie jednego z warszawskich gimnazjalistów, z trzeciej klasy, uczestniczących w LXVIII OM).

Rozwiązanie czwarte

Niech M, N oznaczają środki boków AB i AC trójkąta ABC, a O środek okręgu opisanego na nim. Rozważymy dwa przypadki: O leży wewnątrz czworokąta $APDQ$ i poza tym czworokątem. Oczywiście punkt O leży wewnątrz trójkąta ABC, bo kąty tego trójkąta są ostre.

Oczywiście $OM \parallel DP$ - obie proste są prostopadłe do prostej AB. Podobnie $ON \parallel DQ$. Stąd $[MOP] = [MOD]$ i $[QNO] = [NOD]$. Wynika stąd, że
$[AQOP] = [AMN] + [MON] + [POM] + [NOQ] = [AMN] + [MON] + [DOM] + [NOD] =$
$= [AMN] + [MDN] = [AMN] + [MCN] = [ACM] = \frac{1}{2}[ABC]$
— równość $[MDN] = [MCN]$ wynika z równoległości prostych $BC = DC$ i MN; ostatnia równość ma miejsce, bo M jest środkiem AB.



Bardzo podobne rozumowanie przekonuje nas o tym, że również wtedy, gdy punkt O leży poza czworokątem $APDQ$, zachodzi wzór $[AQOP] = \frac{1}{2}[ABC]$.

Załóżmy teraz, że zachodzi równość $[APQ] = [BCQP]$. Wtedy oczywiście

$$[APQ] = \frac{1}{2}[ABC] = [AQOP] = [APQ] \pm [PQO]\,.$$

Znak zależy od tego, czy punkt O znajduje się poza trójkątem APQ, czy w nim. Stąd jednak wnioskujemy, że $[PQO] = 0$, zatem punkt O leży na prostej PQ, a ponieważ jest on punktem trójkąta ABC, więc leży na odcinku PQ.

Jeśli zaś punkt O leży na odcinku PQ, to zachodzi równość $[APQ] = [APOQ] = \frac{1}{2}[ABC]$, zatem również $[BCPQ] = \frac{1}{2}[ABC]$, więc $[APQ] = [BCPQ]$. $\square$

Pokażę teraz rozwiązanie, które kosztowało mnie chyba kilkanaście minut w miarę bezmyślnego przekształcania, ale ponieważ trygonometrii w zasadzie uczniowie nie umieją, więc jest mało dostępne dla młodzieży. Może jednak kogoś ono zainteresuje.

Rozwiązanie piąte (odgłosy z zamierzchłej przeszłości)

Załóżmy, że średnica okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równa 1. Nie zmniejsza to ogólności rozważań, bo trójkąt zastąpić można podobnym. Przez E oznaczamy punkt wspólny prostej AD i okręgu opisanego na trójkącie ABC (jak w pierwszym rozwiązaniu). Oznaczmy jak zwykle $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ i $\sphericalangle BCA = \gamma$.

Zachodzą równości

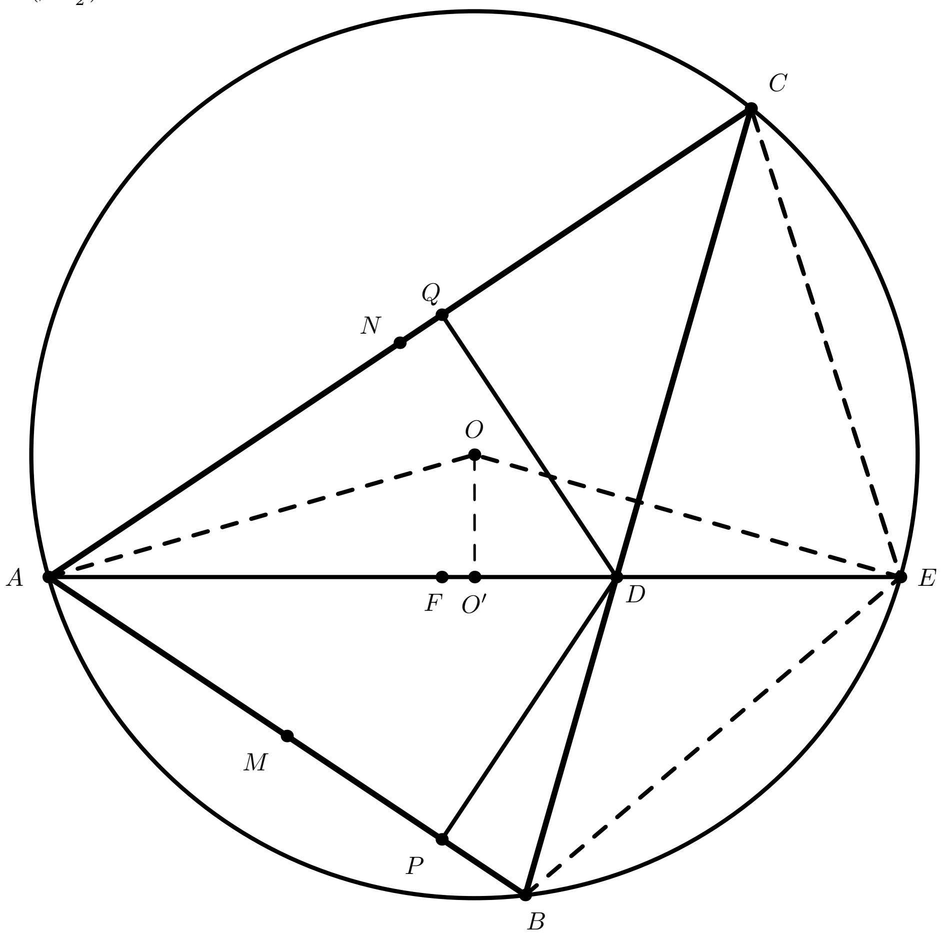
$\sphericalangle ECA = \sphericalangle ECB + \sphericalangle BCA = \sphericalangle EAB + \sphericalangle BCA = \frac{\alpha}{2} + \gamma$, bo $\sphericalangle ECB = \sphericalangle EAB$, gdyż te kąty są oparte na tym samym łuku, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD = \beta + \frac{\alpha}{2}$, bo kąt zewnętrzny trójkąta jest sumą kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych i wreszcie:

$\sphericalangle AEO = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle AOE = 90^\circ - \sphericalangle ACE = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} - (\gamma + \frac{\alpha}{2}) = \frac{\beta-\gamma}{2}$.

Wtedy z twierdzenia sinusów oraz definicji kosinusa i sinusa wynikają równości:

$AB = \sin\gamma$, $BC = \sin\alpha$, $CA = \sin\beta$, $AE = \sin(\gamma + \frac{\alpha}{2})$, $AD = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})}\sin\gamma$,

$AP = AQ = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})}\cos\frac{\alpha}{2}$.



Niech F będzie punktem wspólnym odcinków AE i PQ. Zachodzą równości

$$AF = AP\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})}\cos^2\frac{\alpha}{2}\,.$$

Pola trójkąta APQ i czworokąta $BCQP$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy pole trójkąta APQ jest połową pola trójkąta ABC, więc gdy

$$(1)\qquad \frac{1}{2} = \frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC} = \frac{\sin^2\beta\sin^2\gamma\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2(\beta+\frac{\alpha}{2})\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin\beta\sin\gamma\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2(\beta+\frac{\alpha}{2})}\,.$$

Trójkąt AEO jest równoramienny, odcinek PQ jest prostopadły do odcinka AE, więc punkt O leży na odcinku PQ wtedy i tylko wtedy, gdy jego rzutem prostokątnym na prostą AE jest punkt F, więc gdy

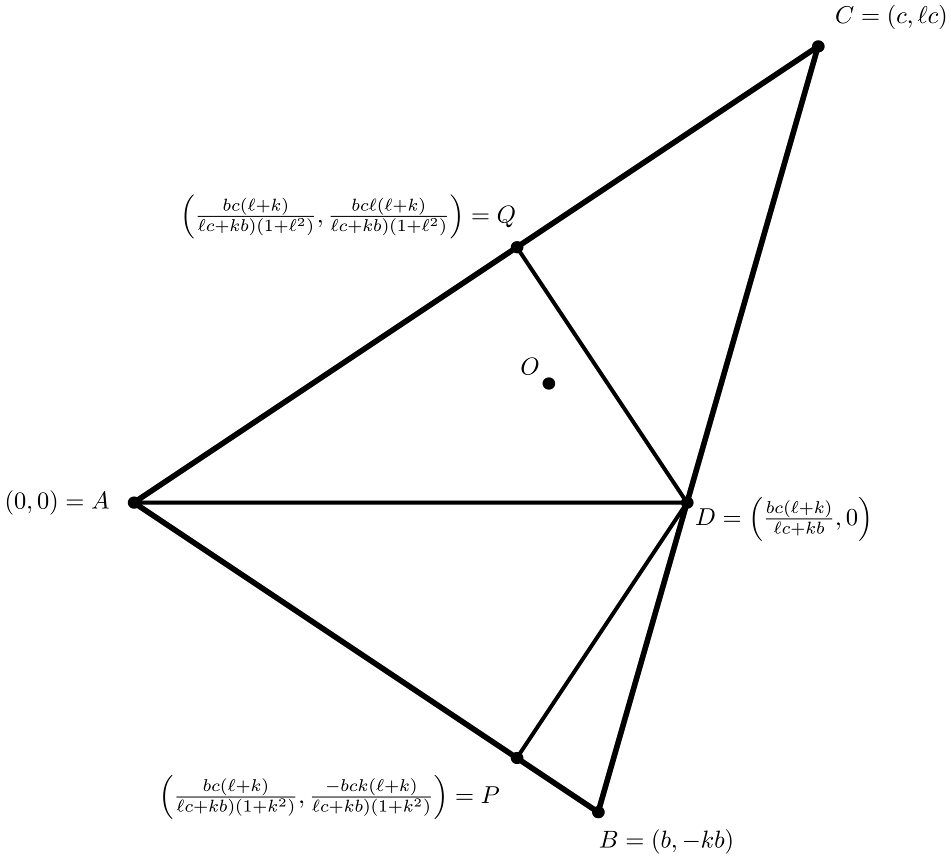
$$(2) \qquad \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})}\cos^2\frac{\alpha}{2} = AF = AO\sin\frac{\sphericalangle EOA}{2} = \frac{1}{2}\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})\,.$$

Z równości $\beta+\frac{\alpha}{2}+\gamma+\frac{\alpha}{2}=180^\circ$ wynika, że $\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})=\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})$. Stąd wnioskujemy równoważność warunków (1) i (2). $\square$

Istnieje rozwiązanie prawie „bezmyślne", które wiele osób powinno napisać w czasie zawodów, ale mało komu się udało, choć liczba próbujących była spora. Chodzi o rozwiązanie analityczne.

Rozwiązanie szóste (teraźniejszość)

Trzeba zacząć od sensownego wybrania układu współrzędnych. Nieprzyjemne jest na ogół znajdowanie równania dwusiecznej, więc przyjmijmy $A=(0,0)$. Oś OX wybieramy tak, by punkt D leżał na niej i miał dodatnią pierwszą współrzędną. Niech $0<k,\ell$ (nie zakładam, że AD jest dwusieczną, jeśli jest to $k=\ell$). Niech b oznacza pierwszą współrzędną punktu B, c — pierwszą współrzędną punktu C. Niech liczby $-k$, ℓ będą współczynnikami kierunkowymi prostych AB i AC. Wobec tego $B=(b,-kb)$ i $C=(c,\ell c)$. Równanie prostej BC wygląda tak: $(\ell c+kb)x+(b-c)y=bc(\ell+k)$. Po podstawieniu $y=0$ wyliczamy pierwszą współrzędną punktu D: $x=\frac{bc(\ell+k)}{\ell c+kb}$, więc $D=\left(\frac{bc(\ell+k)}{\ell c+kb},0\right)$. Równanie prostej prostopadłej do AC przechodzącej przez punkt D ma postać $x+\ell y=\frac{bc(\ell+k)}{\ell c+kb}$. Przyjmując $y=\ell x$, otrzymujemy $x=\frac{bc(\ell+k)}{(\ell c+kb)(1+\ell^2)}$, więc $Q=\left(\frac{bc(\ell+k)}{(\ell c+kb)(1+\ell^2)},\frac{bc\ell(\ell+k)}{(\ell c+kb)(1+\ell^2)}\right)$. Podobne obliczenia prowadzą do wzoru $P=\left(\frac{bc(\ell+k)}{(\ell c+kb)(1+k^2)},-\frac{bck(\ell+k)}{(\ell c+kb)(1+k^2)}\right)$.



Teraz trzeba znaleźć środek okręgu opisanego na trójkącie ABC. To punkt wspólny symetralnych odcinków AB i AC, więc prostych o równaniach $x-ky=\frac{b}{2}(1+k^2)$ i $x+\ell y=\frac{c}{2}(1+\ell^2)$. Odejmując te równania stronami i dzieląc wynik przez $k+\ell$ otrzymujemy $y=\frac{c(1+\ell^2)-b(1+k^2)}{2(k+\ell)}$ oraz $x=\frac{kc(1+\ell^2)-kb(1+k^2)}{2(k+\ell)}+\frac{b}{2}(1+k^2)=\frac{kc(1+\ell^2)+\ell b(1+k^2)}{2(k+\ell)}$, zatem

$$O=\left(\frac{kc(1+\ell^2)+\ell b(1+k^2)}{2(k+\ell)},\ \frac{c(1+\ell^2)-b(1+k^2)}{2(k+\ell)}\right).$$

Mamy $\left(\frac{\ell}{1+\ell^2}+\frac{k}{1+k^2}\right)x+\left(\frac{1}{1+k^2}-\frac{1}{1+\ell^2}\right)y=\frac{(k+\ell)(1+k\ell)}{(1+k^2)(1+\ell^2)}x+\frac{(\ell-k)(\ell+k)}{(1+k^2)(1+\ell^2)}y$. Równanie prostej PQ ma więc postać

$$(1+k\ell)x+(\ell-k)y=(1+k\ell)\tfrac{bc(\ell+k)}{(\ell c+kb)(1+\ell^2)}+(\ell-k)\tfrac{bc\ell(\ell+k)}{(\ell c+kb)(1+\ell^2)}=\tfrac{bc(\ell+k)}{\ell c+kb}.$$

Punkt O leży na prostej PQ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(1+k\ell)\left(\tfrac{kc(1+\ell^2)+\ell b(1+k^2)}{2(k+\ell)}\right)+(\ell-k)\left(\tfrac{c(1+\ell^2)-b(1+k^2)}{2(k+\ell)}\right)=\tfrac{bc(\ell+k)}{\ell c+kb}.$$

Upraszczamy otrzymaną równość:

$$(O)\qquad \frac{(kb+\ell c)(1+k^2)(1+\ell^2)}{2(k+\ell)}=\frac{bc(\ell+k)}{\ell c+kb}.$$

Teraz zapiszemy warunek na to, aby zachodziła równość $[PQA]=\frac{1}{2}[BCA]$. Ponieważ

$$P=\left(\tfrac{bc(\ell+k)}{(\ell c+kb)(1+k^2)},\tfrac{-bck(\ell+k)}{(\ell c+kb)(1+k^2)}\right)=\tfrac{c(\ell+k)}{(\ell c+kb)(1+k^2)}(b,-kb)=\tfrac{c(\ell+k)}{(\ell c+kb)(1+k^2)}B$$

i analogicznie $Q=\frac{b(\ell+k)}{(\ell c+kb)(1+\ell^2)}C$, więc ten warunek jest równoważny równości

$$(P)\qquad \frac{c(\ell+k)}{(\ell c+kb)(1+k^2)}\cdot\frac{b(\ell+k)}{(\ell c+kb)(1+\ell^2)}=\frac{1}{2}.$$

Trudno nie zauważyć, że równości (O) i (P) są równoważne. Znów uzyskaliśmy wynik nie korzystając z tego, że AD jest dwusieczną. Jeżeli tak jest, więc jeżeli zachodzi równość $k=\ell$, to obliczenia upraszczają się istotnie, a z tego założenia nie korzystałem, bo chciałem uzasadnić nieco lepsze twierdzenie, by nie być gorszym m. in. od gimnazjalisty.

Uwaga. Jeśli $k=\ell$, więc gdy AD jest dwusieczną, to powyższe wzory o rozważania upraszczają się. Otrzymujemy wtedy $B=b(1,-k)$, $C=c(1,k)$, $P=\left(\frac{2bc}{(c+b)(1+k^2)},\frac{-2bck}{(c+b)(1+k^2)}\right)=\frac{2bc}{(c+b)(1+k^2)}(1,-k)$, $Q=\left(\frac{2bc}{(c+b)(1+k^2)},\frac{2bck}{(c+b)(1+k^2)}\right)=\frac{2bc}{(c+b)(1+k^2)}(1,k)$, $\quad O=\left(\frac{(b+c)(1+k^2)}{4},\frac{(c-b)(1+k^2)}{4k}\right)$.

Punkt O leży na prostej PQ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{2bc}{(c+b)(1+k^2)}=\frac{(b+c)(1+k^2)}{4}$.

Równość $[APQ]=\frac{1}{2}[ABC]$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\left(\frac{2bc}{(c+b)(1+k^2)}\right)^2=\frac{1}{2}bc$.

Te dwa warunki są w oczywisty sposób równoważne. □

Na deser zadanie 5 z trzeciego stopnia bieżącej OM. Cieszyło się ono dosyć umiarkowanym powodzeniem: rozwiązało je poprawnie dziewięć osób, dziesiątą nagrodzono dwoma punktami. Wiele osób próbowało rozwiązać to zadanie, ale im się to nie udało. Rozwiązania firmowe znaleźć można na stronie internetowej OM, a tu pokażę znów, że można było rzecz przeliczyć w skończonym czasie.

Zadanie piąte z III stopnia LXVIII OM

Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC, w którym $AB=AC$. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu M na bok AB. Okrąg ω jest wpisany w trójkąt ACD i styczny do odcinków AD i AC odpowiednio w punktach K i L. Proste styczne do ω przechodzące przez M przecinają prostą KL w punktach X i Y, przy czym punkty X, K, L, Y leżą w tej kolejności na prostej KL. Udowodnić, że punkty M, D, X, Y leżą na jednym okręgu.

Autor zadania: Piotr Ambroszczyk

Rozwiązanie prawie analityczne

Bez straty ogólności rozważań możemy przyjąć, że $A=(0,a)$, $B=(-1,0)$ i $C=(1,0)$ oraz $a>0$. Wtedy $M=(0,0)$. Równania interesujących nas prostych wyglądają tak:

AC: $\qquad ax+y-a=0,$

AB: $\qquad ax-y+a=0,$

MD: $\qquad x+ay=0 \quad$ (MD jest prostopadła do AB).

Rozwiązując układ złożony z drugiego i z trzeciego równania otrzymujemy $D=\left(\frac{-a^2}{a^2+1},\frac{a}{a^2+1}\right)$.

Mając ten punkt możemy napisać równania prostej CD, równoległej do wektora

$$\left[\frac{-a^2}{a^2+1}-1, \frac{a}{a^2+1}\right] = \frac{1}{a^2+1}\left[-1-2a^2, a\right],$$

więc prostopadłej do wektora $[a, 1+2a^2]$: $\quad ax+(1+2a^2)y-a=0$. Środek I okręgu wpisanego w trójkąt ADC leży oczywiście na dwusiecznej kąta CAD, więc na osi OY. Niech $I=(0,p)$. Odległości punktu I od prostych CA i CD są równe, a to oznacza, że spełniona jest równość $\frac{|p-a|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{|(1+2a^2)p-a|}{\sqrt{a^2+(1+2a^2)^2}}$, zatem $(p-a)^2(1+5a^2+4a^4) = \big((1+2a^2)p-a\big)^2(1+a^2)$, czyli $(p-a)^2(1+a^2)(1+4a^2) = (p+2a^2p-a)^2(1+a^2)$, więc $(p-a)^2(1+4a^2) = (p-a+2a^2p)^2$. Stąd zaś wynika, że $4a^2(p-a)^2 = 4a^2p(p-a)+4a^4p^2$, czyli $(p-a)^2 = p(p-a)+a^2p^2$. Wobec tego $a^2p^2+ap-a^2=0$, czyli

(I) $$ap^2+p-a=0\,.$$

Obejdziemy się bez jawnego wzoru na p. Zauważmy tylko, że z tej równości wynika, że $a-p=ap^2>0$. Jasne jest też, że $p>0$ — środek okręgu wpisanego w trójkąt leży wewnątrz trójkąta.

Prosta przechodząca przez punkt I prostopadła do prostej AC ma równanie $-x+ay=ap$, więc współrzędne punktu L spełniają układ równań

(L) $$\begin{cases} -x+ay=ap \\ ax+y=a \end{cases}$$

Wynika stąd, że $y=\frac{a(1+ap)}{1+a^2}$. Jest to też druga współrzędna punktu K, więc ostatnia równość to równanie prostej KL.

Prosta $y=kx$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie I i promieniu $r=\frac{|p-a|}{\sqrt{1+a^2}}$, czyli okręgu ω, wtedy i tylko wtedy, gdy układ równań

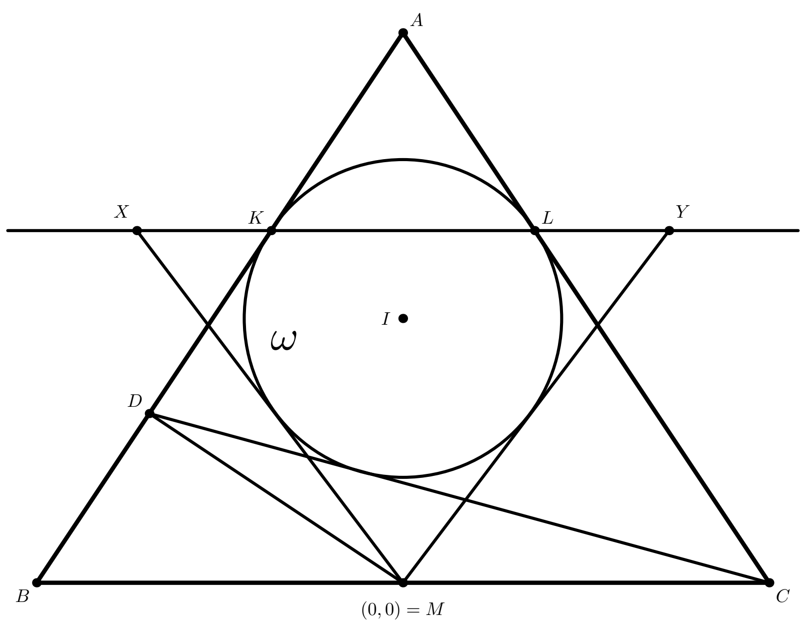
$$\begin{cases} y &= kx \\ x^2+(y-p)^2 &= r^2 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie, więc gdy równanie kwadratowe

$$0 = x^2+(kx-p)^2-r^2 = (1+k^2)x^2-2kpx+p^2-r^2$$

ma dokładnie jeden pierwiastek (podwójny), zatem gdy

$$0=\frac{\Delta}{4} = k^2p^2-(1+k^2)(p^2-r^2) = -p^2+r^2+r^2k^2\,, \quad \text{czyli gdy} \quad k=\pm\frac{\sqrt{p^2-r^2}}{r}\,.$$



Niech T będzie punktem styczności prostej MY i okręgu ω. Wtedy MT^2 to

$$p^2-r^2=p^2-\left(\frac{|p-a|}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2=\frac{p^2(1+a^2)-(p-a)^2}{1+a^2}=\frac{p^2a^2-a^2+2ap}{1+a^2}=\frac{a(p^2a-a+p)+ap}{1+a^2}=\frac{ap}{1+a^2}\,,$$

zatem

$$k=\operatorname{tg}\sphericalangle TMC=\frac{MT}{r}=\sqrt{\frac{ap}{1+a^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+a^2}}{a-p}=\frac{\sqrt{ap}}{a-p}\,.$$

Punkt Y leży na prostych $y=\frac{\sqrt{ap}}{a-p}x$ (na stycznej do okręgu ω przechodzącej przez punkt M) i $y=\frac{a(1+ap)}{1+a^2}$ (czyli na prostej KL). Stąd wynika, że jego pierwszą współrzędną jest liczba

$$\frac{a(1+ap)}{1+a^2}\cdot\frac{a-p}{\sqrt{ap}}=\frac{a(a-p+a^2p-ap^2)}{(1+a^2)\sqrt{ap}}=\frac{a^3p}{(1+a^2)\sqrt{ap}}=\frac{a^2\sqrt{ap}}{(1+a^2)}$$

i wobec tego

$$L=\frac{a}{1+a^2}(a\sqrt{ap},1+ap)\,.$$

Środek okręgu opisanego na trójkącie LKM leży na przecięciu prostej $x=0$, która jest symetralną odcinka KL, i symetralnej odcinka OL, której równanie wygląda tak:

$$a\sqrt{ap}x+(1+ap)y-\frac{a}{2(1+a^2)}\left(a^3p+(1+ap)^2\right)=0\,.$$

Z równania (I) otrzymujemy $(1+ap)^2=1+ap+a(p+ap^2)=1+ap+a^2$. Stąd zaś otrzymujemy zależność

$$0=a\sqrt{ap}x+(1+ap)y-\tfrac{a}{2(1+a^2)}\left(a^3p+(1+ap)^2\right)=a\sqrt{ap}x+(1+ap)y-\tfrac{a(a^3p+1+ap+a^2)}{2(1+a^2)}=$$
$$=a\sqrt{ap}x+(1+ap)y-\tfrac{a(1+ap)(1+a^2)}{2(1+a^2)}=a\sqrt{ap}x+(1+ap)y-\tfrac{a(1+ap)}{2}.$$

Jeśli $x=0$, to $y=\frac{a}{2}$, a to oznacza, że środek okręgu opisanego na trójkącie LKM jest środkiem odcinka AM, więc również punkt A leży na tym okręgu. Średnicą tego okręgu jest zatem odcinek AM, a ponieważ $\sphericalangle ADM=90^\circ$, więc również punkt D leży na tym okręgu, co kończy dowód twiedzenia.