Wielomiany kwadratowe — co tu może być ciekawego?

„*Dzień zakochanych*” więc coś na temat kobiety – mężczyźni.

14 lutego 1877 r. urodził się Edmund Landau, wybitny niemiecki matematyk.

14 lutego 1943 r. zmarł Dawid Hilbert, wybitny niemiecki matematyk jeden z najwybitniejszych w historii swiata.

Hilbert i Klein chcieli, by E. Noether została profesorem w Getyndze (KOBIETA — profesorem, tego jeszcze nie było). Zaprosili ją w 1915 r. i „już” w 1919 pozwolono na jej habilitację i została „prywatnym docentem”

Hilbert umożliwiał jej wykładanie — przykrywką było jego nazwisko. W katalogu zajęć semestru zimowego 1916-17 pojawiło się ogłoszenie:

Matematyczna Fizyka — seminarium: Professor Hilbert, przy udziale Dr E Noether, Poniedziałki w godzinach 4-6, bez opłat.

EL powiedział o Emmie Noether wybitnej niemieckiej matematyczce:

I can testify that she is a great mathematician, but that she is a woman, I cannot swear.

DH z tej samej okazji: The faculty is not a pool changing room.

Cytaty pochodzą z http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/

1. Rozgrzewka: Znaleźć liczbę naturalną n wiedząc , że suma $1+2+3+\cdots+n$ jest trzycyfrową liczbą o jednakowych cyfrach.

Oczywiście tu żadnych istotnych trudności nie ma: Można uznać, że mamy zająć się dziewięcioma równaniami kwadratowymi: $\frac{1}{2}n(n+1)=111$, $\frac{1}{2}n(n+1)=222$, $\frac{1}{2}n(n+1)=333$, $\ldots$, $\frac{1}{2}n(n+1)=999$ i zupełnie bezmyślnie je rozwiązać używając znany wzór już. Można również zauważyć, że wtedy liczba 222, 444, 666, ... , 1998 musi być iloczynem kolejnych liczb naturalnych, a każda z nich jest wielokrotnością liczby $111=3\cdot 37$, więc zważywszy, że $37^2=40^2-6\cdot 40+3^2=1369$, to albo $n=37$ albo $n+1=37$ — jednym z czynników musi być 37, bo inaczej iloczyn $n(n+1)$ byłby większy od 2000. No to obliczamy $37\cdot 18=740-74=666$ i $37\cdot 19=740-37=703$ i widzimy, że jedynym rozwiązaniem tego zadania jest $n=36$. $\square$

2. Dowieść, że jeśli każda z funkcji $(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2$, $(b_1x+c_1)^2+(b_2x+c_2)^2$ jest kwadratem funkcji liniowej nie będącej stałą, to również funkcja $(c_1x+a_1)^2+(c_2x+a_2)^2$ jest kwadratem funkcji liniowej.

Jeśli $A\neq 0$, to $Ax^2+Bx+C=A(x+\frac{B}{2A})^2+C-\frac{B^2}{4A}$, więc jeśli $B^2-4AC=0$, to wielomian Ax^2+Bx+C jest kwadratem wielomianu liniowego. Oczywiście wyróżnik wielomianu $(\alpha x+\beta)^2=\alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2$, czyli $(2\alpha\beta)^2-4\alpha^2\beta^2$ jest równy 0, zatem wielomian kwadratowy jest kwadratem wielomianu pierwszego stopnia wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyróżnik jest zerem.

Wobec tego $0=(a_1b_1+a_2b_2)^2-(a_1^2+a_2)^2(b_1^2+b_2)^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2$ oraz $0=(b_1c_1+b_2c_2)^2-(b_1^2+b_2)^2(c_1^2+c_2)^2=(b_1c_2-b_2c_1)^2$, czyli $a_1b_2=a_2b_1$ i $b_1c_2=b_2c_1$. Stąd $a_1b_2b_1c_2=a_2b_1b_2c_1$, więc jeśli $b_1b_2\neq 0$, to $a_1c_2=a_2c_1$, a to oznacza, że wyróżnik trzeciego z wielomianów jest zerem, nawet wtedy, gdy $c_1=c_2=0$, bo wtedy ten trzeci wielomian jest stałą, więc nie jest kwadratowy! Jeśli natomiast $b_1b_2=0$, to $b_1=0$ lub $b_2=0$. Jednak $b_1^2+b_2^2\neq 0$, bo wielomian $(b_1x+c_1)^2+(b_2x+c_2)^2$ jest kwadratem funkcji liniowej nie będącej stałą, więc jest kwadratowy. Jeśli $b_1=0$, to $a_1b_2=0$, więc $a_1=0$ oraz $b_2c_1=0$, więc $c_1=0$, zatem $(c_1x+a_1)^2+(c_2x+a_2)^2=(c_2x+a_2)^2$, więc w tym wypadku teza jest prawdziwa. Podobnie jeśli $b_2=0$, to $a_2=0=c_2$ itd. $\square$

A teraz zadanka nie z OM, ale moim zdaniem niezłe na kółko.

3. Czy parabole $y = x^2$ oraz $y = 5x^2$ mają różny kształt?

Każdy „wie”, że tak, bo przecież widzi, że ta pierwsza jest bardziej „rozłożysta” od drugiej. To całkiem jasne, ale mało prawdziwe. Każdy wie, że dwa kwadraty mają ten sam kształt, choć mogą różnić się rozmiarem. Podobnie dwa koła, dwa trójkąty równoboczne itd. Otóż równość $y = 5x^2$ można przepisać w postaci $5y = (5x)^2$, więc przyjąwszy $v = 5y$ i $u = 5x$ otrzymujemy $v^2 = u^2$. Oznacza to, że po zmianie jednostki, takiej samej na obu osiach, z pierwszej paraboli robi się druga, więc są podobne. Nawet jednokładne względem punktu $(0, 0)$. Mają więc taki sam kształt! $\square$

W wielu podręcznikach autorzy piszą, że *parabolą nazywają wykres funkcji kwadratowej.* Niby mogą nazywać co chcą, ale wedle nich parabola po obróceniu jej o kąt niezerowy przestaje być parabolą, bo przestaje być wykresem. Oczywiście mogliby napisać, że parabola to zbiór przystający do wykresu funkcji kwadratowej, ale dodanie tych trzech słów ich bardzo męczy. A jakież tu zadanie jest w tle? Wśród autorów podręczników szkolnych panuje jakieś dziwaczne przekonanie, że należy unikać jakiejkolwiek definicji paraboli, a akurat matematyka to jedyny przedmiot w szkole pozwalający na korzystanie z definicji w sposób ścisły, co ma znaczenie również poza matematyka (np. prawo, umowy z bankami itp.)

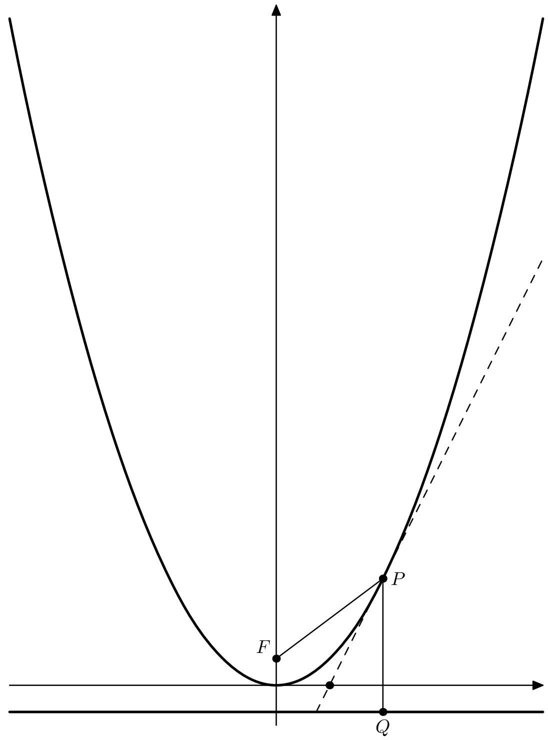
4. Dowieść, że jeśli $a \neq 0$, to wykres funkcji $y = ax^2$ składa się ze wszystkich punktów równoodległych od pewnego punktu i pewnej prostej.

Poszukamy punktu na osi symetrii paraboli — jest w miarę jasne, że na niej właśnie ma się znaleźć. Wtedy poszukiwana prosta powinna być do tej osi symetrii prostopadła. Niech $F = (0, f)$. Jasne jest, że jedyną rozsądną kandydatką na ową prostą jest prosta d o równaniu $y = -f$. Odległości punktu (x, y) od d i od F mają być takie same, więc ma zachodzić równość $\big(y - (-f)\big)^2 = (x - 0)^2 + (y - f)^2$, czyli $2yf = x^2 - 2yf$, tzn. $y = \frac{1}{4f}x^2$. Wystarczy przyjąć, że $f = \frac{1}{4a}$. $\square$

Mamy zatem geometryczną definicję paraboli.

5. A teraz coś o stycznej do paraboli. Styczną do paraboli w punkcie P można zdefiniować jako prostą przechodzącą przez P nierównoległą do osi symetrii paraboli — nie jest to najlepsze postępowanie, ale jest poprawne i naturalne w kontekście definicji stycznej do okręgu.

Załóżmy, że $P = (p, ap^2)$. Udowodnimy, że styczna jest dwusieczną kąta zawartego między prostą PF i prostą o równaniu $x = p$, czyli pionową przechodzącą przez P. Zaczniemy od znalezienia równania owej stycznej. Ponieważ ma ona być niepionowa, więc równanie będzie postaci $y = \gamma x + \beta$. Z definicji wynika od razu, że układ równań $\begin{cases} y = \gamma x + \beta \\ y = ax^2 \end{cases}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = p$, $y = ap^2$. Dokładnie jedno rozwiązanie ma więc też równanie kwadratowe $ax^2 = \gamma x + \beta$, zatem $\gamma^2 + 4a\beta = 0$ i oczywiście $ap^2 = \gamma p + \beta$, więc $0 = \gamma^2 + 4a(ap^2 - \gamma p) = (2ap - \gamma)^2$. Czyli $\gamma = 2ap$ (co i tak „wszyscy” wiedzą, bo współczynnik kierunkowy stycznej to pochodna).



na rysunku obok znajduje się parabola o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2$. Jej ognisko to punkt $F = (0, \frac{1}{2})$, kierownica ma równanie $y = -\frac{1}{2}$.

Równanie stycznej do paraboli w punkcie $P = (p, ap^2)$ wygląda więc tak: $y = 2apx - ap^2$. Prosta pionowa przechodząca przez P przecina prostą o równaniu $y = -\frac{1}{4a}$ w punkcie $Q = (p, -\frac{1}{4a})$. Aby wykazać, że styczna jest dwusieczną kąta $\sphericalangle FPQ$ należy wykazać, że przechodzi ona przez środek odcinka FQ — wiemy przecież, że $FP = PQ$. Środek to punkt $(\frac{p}{2}, 0)$, więc oczywiście leży na prostej $y = 2apx - ap^2$. $\square$

Myślę, że pokazałem przykłady kilku zadań, które można zrobić w ramach kółka dla uczniów rozważających startowanie w OM. Ostatnie zadanie w zasadzie wymaga komentarza „fizycznego". Otóż anteny radioteleskopów mają kształt paraboloidy obrotowej, bo fale elektromagnetyczne po odbiciu się od niej trafiają w jeden punkt, w ognisko paraboli — kąt padania jest równy kątowi odbicia. Doszliśmy do tego za pomocą kilku prostych zadań, a to wyjaśnia wagę paraboli w życiu codziennym.

Jeszcze trzy łatwe zadania do samodzielnego rozwiązania.

Cięciwą paraboli nazywamy odcinek, którego końcami są punkty leżące na paraboli.

6. Udowodnić, że środki wszystkich cięciw równoległych do danej prostej leżą na prostej równoległej do osi symetrii paraboli.

7. Udowodnić, że jeśli $a > 0$, to wszystkie punkty wewnetrzne dowolnej cięciwy paraboli o równaniu $y = ax^2 + bxc$ znajdują się nad parabolą.

— *należy więc udowodnić, że funkcja kwadratowa* $y = ax^2 + bx + c$ *jest ściśle wypukła.* Oczywiście w tym zadaniu i w jego rozwiązaniu nie należy wspominać o pochodnych.

8. Dla każdego punktu P danej paraboli oznaczmy przez $P^\top$ taki punkt, że styczne w punktach P i $P^\top$ są prostopadłe, a przez $W(P)$ punkt wspólny tych stycznych. Dowieść, że wszystkie punkty $W(P)$ leżą na jednej prostej.

A teraz kilka słów o ocenianiu rozwiązań w OM.

Zadanie

Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ wyznaczyć najmniejszą wartość wielomianu
$W_n(x) = x^{2n} + 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} + \ldots + (2n-1)x^2 + 2nx$
określonego w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych.

Pojawiło się jako zadanie 3 na II stopniu LXV OM (21 lutego 2014 r.)

Rozwiązanie uczestniczki OM — tekst jest przepisany z kartki praktycznie bez zmian, zachowany został styl autorki.

Dla $n \geqslant 2$ wielomian $W_n(x)$ można przedstawić w następujący sposób:

$$W_n(x) = x^2 W_{n-1}(x) + (2n-1)x^2 + 2nx \qquad (1).$$

Udowodnijmy, że $W_n(-1) = -n$.
$W_n(-1) = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 2n - 1 - 2n =$
$(1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1) - (2 + 4 + \ldots + 2n) =$
$= \frac{1+2n-1}{2} \cdot n - \frac{2+2n}{2} \cdot n = n^2 - (1+n)n = -n.$

Udowodnijmy, że wielomian $W_n(x)$ przyjmuje wartości większe bądź równe $-n$.
$W_n(x) \geqslant -n$, $W_n(x) + n \geqslant 0$.
I Sprawdźmy, czy powyższa nierówność zachodzi dla $n = 1$.
$w_1(x) + 1 \geqslant 0$, $x^2 + 2x + 1 \geqslant 0$, $(x+1)^2 \geqslant 0$.
II Załóżmy, że istnieje $k \in \mathbb{N}_+$, dla którego nierówność $W_k(x) + k \geqslant 0$ jest prawdziwa.
Sprawdźmy, czy prawdziwa jest również nierówność $W_{k+1}(x) + k + 1 \geqslant 0$.
Pod $W_{k+1}(x)$ podstawmy (1)
$x^2 W_k(x) + (2k + 2 - 1)x^2 + (2k+2)x + k + 1 \geqslant 0$
$x^2(W_k(x) + (2k+1)) + (2k+2)x + k + 1 \geqslant 0$
$\Delta = (2k+2)^2 - 4(W_k(x) + 2k + 1)(k+1)$
$\Delta = 4(k+1)(k + 1 - W_k(x) - 2k - 1)$
$\Delta = -4(k+1)(W_k(x) + k) \leqslant 0,$
bo $k+1 \geqslant 0$ i $W_k(x)+k \geqslant 0$ — z założenia indukcyjnego, $\Delta \leqslant 0 \Longrightarrow$ nierówność $W_{k+1}(x)+k+1 \geqslant 0$ jest prawdziwa.
z I oraz II , kroku indukcyjnego wynika, że wielomian $W_n(x)$ przyjmuje wartości większe bądź równe $-n$. (3).
Z (2) i (3) wynika, że minimalną wartością wielomianu $W_n(x)$ jest $-n$.

To rozwiązanie oceniono najpierw na 2 punkty, co oznacza „połowicznie rozwiązane", a następnie po dyskusji ocena została podniesiona do 5 punktów, więc rozwiązanie uznano za pełne, za jedyny mankament uznano brak pełnej kontroli wyrażenia $W_k(x) + (2k+1)$ — należało wyraźnie napisać, że to wyrażenie nie zeruje się w żadnym punkcie, a takiego zdania w tekście nie ma, choć w istocie rzeczy dowód tego stwierdzenia jest — usterka jest więc natury redakcyjnej a nie merytorycznej. Oceniający najpierw twierdzili, że uczestniczka obliczyła wyróżnik, a przecież wyrażenie

$$x^2 W_k(x) + (2k + 2 - 1)x^2 + (2k+2)x + k + 1$$

nie jest wielomianem kwadratowym. Formalnie mieli rację. Jednak jeśli mamy do czynienia z wyrażeniem postaci $a(x)x^2 + b(x)x + c(x)$ i $a(x) \neq 0$, to możemy je zapisać w postaci

$$a(x)\left(x + \frac{b(x)}{2a(x)}\right)^2 + \frac{4a(x)c(x) - b(x)^2}{4a(x)}$$

— to postać kanoniczna, choć formalnie nie mamy tu wielomianu kwadratowego! W dodatku wyprowadzenie wzoru, z którego wszystko wynika jest powtórzeniem słowo w słowo tego, co powinno się robić na lekcjach w każdej klasie, którą raczymy opowieściami o równaniach kwadratowych. □

Ten problem już kiedyś wystąpił w OM

Zadanie sprzed wielu lat (zadanie 2 z I stopnia XVII OM).

Udowodnić, że jeśli $x^3 + 2px + q = 0$, to $xq \leqslant p^2$.

Rozwiązanie co najmniej dwóch uczniów i również takie jest w książce „Zadania z olimpiad matematycznych. tom IV".

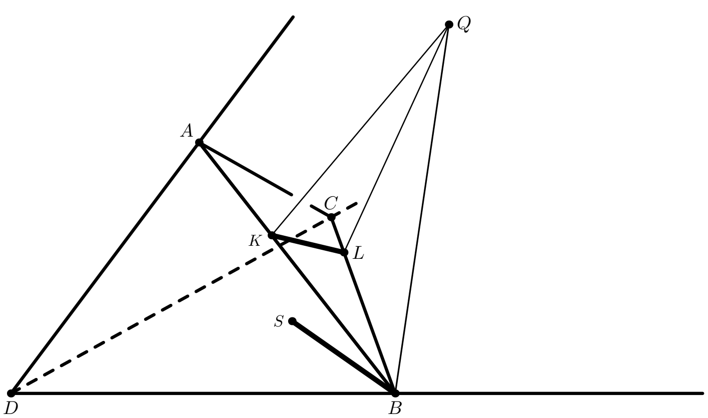
Jeśli $x \neq 0$, to ponieważ równanie $x \cdot x^2 + 2px + q = 0$ ma pierwiastek, więc $0 \leqslant \Delta = 4p^2 - 4xq$, zatem $qx \leqslant p^2$. Dla $x = 0$ mamy $0 \cdot q = 0 \leqslant p^2$. □

Na koniec jeszcze kilka słów o zadaniach z pierwszego stopnia bieżącej OM.

9. *Dany jest czworościan $ABCD$. Punkt S jest środkiem sfery wpisanej w czworościan $ABCD$, zaś Q jest środkiem sfery dopisanej do niego, stycznej do ściany ABC oraz do płaszczyzn pozostałych ścian. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi punktu Q na proste AB i BC. Dowieść, że proste (skośne) KL i BS są prostopadłe.*

Rozwiązanie

Płaszczyzny BCQ i BCS są prostopadłe, gdyż dzielą na połowy kąty dwuścienne między półpłaszczyzną o krawędzi BC przechodzącą przez punkt A i płaszczyzną DBC, czyli kąty dopełniające się do 180°. Prosta QL jest prostopadła do krawędzi przecięcia tych płaszczyzn, leży w płaszczyźnie BCQ, zatem jest prostopadła do płaszczyzny BCS. Wobec tego jest prostopadła do każdej prostej leżącej w płaszczyźnie BCS, w tym do prostej BS. W taki sam sposób uzasadniamy prostopadłość prostych BS i QK. Proste QL i QK są różne, więc wyznaczają płaszczyznę. Płaszczyzna QKL jest prostopadła do prostej BS, zatem prosta KL, zawarta w płaszczyźnie BKL, też jest prostopadła do BS.



□

Tak rozwiązał jeden tylko uczestnik z okręgu warszawskiego (województwa mazowieckie i podlaskie). Wszyscy inni rozwiązywali w sposób przedstawiony poniżej, motywowany tym, co przeczytali w dwóch artykułach w miesięczniku „*Delta*".Mnie to martwi, bo oznacza to, że wolą „uczone" metody i że zapewne rozpoczęli od dopasowania zadania do ostatnio przeczytanych tekstów. Wysoce prawdopodobne jest też to, że tę możliwość dostrzegło kilka osób, a pozostali dowiedzieli się od nich i sami napisali rozwiązanie, ale korzystając „z wiedzy". Ja nie przytaczam tu większości użytych terminów, bo nie ma powodu, ale w pracach pojawiły się sfery Dandelina, proste sprzężone izogonalnie itd.

Rozwiązanie drugie

Punkty D, S, Q leżą w tej kolejności na prostej, wzdłuż której przecinają się płaszczyzny dwusieczne kątów dwuściennych czworościanu $ABCD$, których krawędziami są proste DA, DB i DC. Niech S_A, S_C i S_D będą rzutami prostokątnymi punktu S na płaszczyzny BCD, ABD i ABC, a Q_A, Q_C i Q_D — rzutami punktu Q na te płaszczyzny. Odcinki stycznych do sfery wychodzących z jednego punktu są równe, więc $BS_A = BS_C = BS_D$, $CS_A = CS_C = CS_D$, $BQ_A = BQ_C = BQ_D$, $CQ_A = CQ_C = CQ_D$, $DS_A = DS_C$ i $DQ_A = DQ_C$. Wynika stąd, że $S_AQ_A = DQ_A - DS_A = DQ_C - DS_C = S_CQ_C$. Stąd i z cechy bbb przystawania trójkątów wynika, że następujące trójkąty są przystające: S_ABQ_A i S_CBQ_C, S_ABC i S_DBC, S_CBA i S_DBA, Q_ABC i Q_DBC, Q_CBA i Q_DBA. Stąd wynikają następujące równości kątów: $\sphericalangle S_ABQ_A = \sphericalangle S_CBQ_C$, $\sphericalangle S_ABC = \sphericalangle S_DBC$, $\sphericalangle S_CBA = \sphericalangle S_DBA$, $\sphericalangle Q_ABC = \sphericalangle Q_DBC$, $\sphericalangle Q_CBA = \sphericalangle Q_DBA$. Mamy więc $\sphericalangle S_DBC + \sphericalangle CBQ_D = \sphericalangle S_ABC + \sphericalangle CBQ_A = \sphericalangle S_ABQ_A = = \sphericalangle S_CBQ_C = \sphericalangle S_CBA + \sphericalangle ABQ_C = \sphericalangle S_DBA + \sphericalangle ABQ_D$, zatem $\sphericalangle S_DBC + \sphericalangle CBQ_D = \sphericalangle S_DBA + \sphericalangle ABQ_D$ i oczywiście
$\sphericalangle S_DBC + \sphericalangle S_DBA = \sphericalangle ABC = \sphericalangle CBQ_D + \sphericalangle ABQ_D$. Stąd wynikają równości $\sphericalangle S_DBC = \sphericalangle ABQ_D$ oraz $\sphericalangle S_DBA = \sphericalangle CBQ_D$.[1]

Z twierdzenia o trzech prostopadłych wynika, że punkt K jest rzutem prostokątnym punktu Q_D na prostą AB, a punkt L — punktu Q_D na prostą BC. Punkty BLQ_DK leżą na okręgu o średnicy BQ_D, niekoniecznie w tej kolejności. □

10. *Wiersze i kolumny nieskończonej tabeli są ponumerowane liczbami całkowitymi nieujemnymi. W jej pola wpisane są liczby całkowite nieujemne według następującej reguły: w każdym polu znajduje się najmniejsza liczba, nieobecna w żadnym wcześniejszym polu tego samego wiersza ani tej samej kolumny (poniżej, dla ilustracji, fragment tej tabeli). Udowodnić, że jeśli na przecięciu m–tego wiersza z n–tą kolumną znajduje się liczba r, to na przecięciu m–tego wiersza z r–tą kolumną znajduje się liczba n.*

0	1	2	3	4	…
1	0	3	2	5	…
2	3	0	1	6	…
3	2	1	0	7	…
4	5	6	7	0	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Rozwiązanie

Pokażemy najpierw nieco większy fragment tabeli.

[1]Niektórzy mówią, że punkty S_D i Q_D są izogonalnie sprzężone.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\
1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & \dots \\
2 & 3 & 0 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 & \dots \\
3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & \dots \\
4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\
5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 & \dots \\
6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 & \dots \\
7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Będziemy używać zapisu liczb w dwójkowym systemie pozycyjnym. Każda dodatnia liczba całkowita n ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $c_0 + 2c_1 + \ldots + 2^t c_t$, gdzie $c_i = 0$ lub 1 (dla $i = 0, \ldots, t$), przy czym $c_t = 1$; zapisem dwójkowym liczby n jest wtedy ciąg $t+1$ cyfr $c_t c_{t-1} \ldots c_1 c_0$. Działa ponadto umowa, że wiodącą jedynkę ($c_t = 1$) poprzedzamy zerami tworząc nieskończony ciąg (podobnie, jak w zapisie dziesiętnym, gdzie np. liczbę 77 można — w razie potrzeby — zapisać jako $\ldots 00077$; tę samą liczbę zapisujemmy w systemie dwójkowym jako 1001101 ($77 = 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 64$), a w wyniku wydłużenia ciągu cyfr w lewo jako $\ldots 001001101$). Liczbę 0 zapisujemy jako nieskończony ciąg zer. Mówimy, że liczba o przedstawieniu dwójkowym $\ldots 000 c_t \ldots c_1 c_0$ ma na i-tej pozycji zero (jedynkę), gdy $c_i = 0$ (gdy $c_i = 1$).

Niech x, y będą nieujemnymi liczbami całkowitymi. Patrzymy na ich przedstawienia dwójkowe (nieskończone). Symbolem $x \diamondsuit y$ będziemy oznaczać liczbę określoną następująco:

gdy x oraz y mają na i-tej pozycji jednakowe cyfry, liczba $x \diamondsuit y$ ma na i-tej pozycji zero;

gdy x oraz y mają na i-tej pozycji różne cyfry, liczba $x \diamondsuit y$ ma na i-tej pozycji jedynkę.[2]

Przykład: dla $x = \ldots 0\,001\,001\,101$, $y = \ldots 0\,000\,011\,100$ mamy $x \diamondsuit y = \ldots 0\,001\,010\,001$. Jasne jest, że zdefiniowane tak działanie przemienne ($x \diamondsuit y = y \diamondsuit x$) i łączne ($(x \diamondsuit y) \diamondsuit z = x \diamondsuit (y \diamondsuit z)$). Jest też jasne, że $x \diamondsuit 0 = x$ oraz $x \diamondsuit x = 0$ dla każdej liczby x. Ma ono ponadto ważną własność:

(1) jeżeli $z = x \diamondsuit y$, to $x = y \diamondsuit z$ oraz $y = x \diamondsuit z$.

Wynika to od razu z wymienionych wcześniej własności działania $\diamondsuit$:

$$y \diamondsuit z = z \diamondsuit y = (x \diamondsuit y) \diamondsuit y = x \diamondsuit (y \diamondsuit y) = x \diamondsuit 0 = x \text{ oraz}$$
$$x \diamondsuit z = x \diamondsuit (x \diamondsuit y) = (x \diamondsuit x) \diamondsuit y = 0 \diamondsuit y = y.$$

W tabeli, rozważanej w zadaniu, pole leżące na przecięciu m-tego wiersza i n-tej kolumny będziemy oznaczać $\langle m, n \rangle$. Udowodnimy, że dla każdej pary liczb całkowitych $m, n \geqslant 0$:

(2) w polu $\langle m, n \rangle$ znajduje się liczba $m \diamondsuit n$.

(jest to więc „tabliczka wartości działania $\diamondsuit$”, podobna do „tabliczki mnożenia”, choć znacznie większa). Teza zadania wyniknie stąd natychmiast: gdy w polu $\langle m, n \rangle$ stoi liczba $r = m \diamondsuit n$, to w myśl reguły (1), $n = m \diamondsuit r$, czyli w polu $\langle m, r \rangle$ stoi liczba n.

Dowód prowadzimy przez indukcję względem sumy współrzędnych pól. W polu $\langle 0, 0 \rangle$ znajduje się najmniejsza dopuszczalna liczba, czyli 0 ($= 0 \diamondsuit 0$). Ustalmy wartość sumy $s \geqslant 1$ i załóżmy, że

[2] i–ta cyfra liczby $x \diamondsuit y$ jest więc resztą z dzielenia przez 2 sumy i–tych cyfr liczb x, y. Traktując i–te cyfry liczb x, y jako wartości logiczne zdań możemy powiedzieć, że i–tą cyfrą liczby $x \diamondsuit y$ jest alternatywa wykluczająca i–tych cyfr liczb x, y.

w każdym polu $\langle k,l\rangle$ o sumie $k+l<s$ znajduje się liczba $k\diamondsuit l$. Weźmy dowolne pole $\langle m,n\rangle$ o sumie $m+n=s$. Należy udowodnić, że liczba r, określona jako $r=m\diamondsuit n$, jest różna od wszystkich liczb postaci $k\diamondsuit n$ (gdzie $k<m$) oraz od wszystkich liczb $m\diamondsuit l$ (gdzie $l<n$), i że jest najmniejszą liczbą o tej własności.

Pierwsza część stwierdzenia jest oczywista: gdyby zachodziła równość $k\diamondsuit n=m\diamondsuit n$, to zgodnie z regułą (1) otrzymalibyśmy równość $k=(k\diamondsuit n)\diamondsuit n=(m\diamondsuit n)\diamondsuit n=m$, wbrew $k<m$. Analogicznie wykluczamy możliwość $m\diamondsuit n=m\diamondsuit l$, $l<n$.

Pozostaje uzasadnić, że każda liczba $q<r$ znajduje się na jakimś polu $\langle k,n\rangle$, $k<m$, lub $\langle m,l\rangle$, $l<n$ – czyli, zgodnie z założeniem indukcyjnym – że

(3) $\quad q=k\diamondsuit n$ dla pewnego $k<m$ lub $q=m\diamondsuit l$ dla pewnego $l<n$.

Niech j będzie najwcześniejszą (od lewej strony) pozycją, na której różnią się cyfry przedstawień dwójkowych liczb q i r. Nierówność $q<r$ oznacza, że na tej pozycji liczba q ma zero, a liczba r jedynkę. Skoro $r=m\diamondsuit n$, liczby m, n mają na pozycji j różne cyfry. Przyjmijmy, że m ma jedynkę, a n ma tam zero (nie tracimy ogólności, wobec symetrii ról wierszy i kolumn).

Weźmy liczbę $k=q\diamondsuit n$. Wtedy, zgodnie z (1), $q=k\diamondsuit n$. Aby uzyskać jeden z wymaganych warunków (3), wystarczy wykazać, że $k<m$.

Przypuśćmy, że tak nie jest, więc że $k\geqslant m$. Na pozycji j liczba k ma zero, a liczba m jedynkę, zatem $k\neq m$, więc $k>m$. Oznacza to, że na pewnej pozycji i, na lewo od j, liczba k ma jedynkę, zaś m ma zero. Skoro $k=q\diamondsuit n$ oraz $m=r\diamondsuit n$, cyfry liczb q, n na pozycji i są różne, a cyfry liczb r, n na tej pozycji są jednakowe. To się nie da pogodzić z tym, że zapisy liczb q i r pokrywają się w całym fragmencie na lewo od j, w tym na pozycji i. Sprzeczność dowodzi, że istotnie $k<m$. (Gdybyśmy, chwilę wcześniej, przyjęli przeciwny układ cyfr liczb m, n na pozycji j, uzyskalibyśmy dla liczby $l=m\diamondsuit q$ drugi z warunków (3)).

Otrzymaliśmy tezę indukcyjną dla dowolnego pola $\langle m,n\rangle$ z sumą $m+n=s$. To dowodzi słuszności stwierdzenia (2) dla wszystkich par liczb $m,n\geqslant 0$ i tym samym kończy rozwiązanie zadania. $\square$

Tu pewien komentarz. Do rozwiązania dochodzi się rysując tabelę. Wtedy zauważamy, że pojawiają się tam kwadraty i są przestawiane. To powinno nasunąć nam pomysł zapisywania liczb w układzie dwójkowym (może to coś da, kto wie?). A gdy to zrobimy i przyjrzymy się, to jest spora szansa na to, że zauważymy, że pojawia się dodawanie wektorów (nieskończonej długości) „po współrzędnych" modulo 2. W rozwiązaniu nie ma terminu, bo nie jest potrzebny, ale w rzeczywistości w naturalny sposób pojawiła się nieskończenie wymiarowa przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{Z}_2$. O czymś takim można wspomnieć na kółku przy omawianiu tego zadania.

I jeszcze o zadaniu ósmym.

11. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Prosta AI przecina odcinek BC w punkcie D. Symetralna odcinka AD przecina proste BI oraz CI odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że wysokości trójkąta PQD przecinają się w punkcie I.

Rozwiązanie

Oznaczmy, jak zwykle, $\sphericalangle CAB=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$, $\sphericalangle BCA=\gamma$. Niech S będzie środkiem odcinka AD. W trójkącie ABD zachodzą związki $\sphericalangle DAB=\frac{\alpha}{2}$ oraz

$$\sphericalangle BDA=180^\circ-(\beta+\tfrac{\alpha}{2})=\alpha+\beta+\gamma-(\beta+\tfrac{\alpha}{2})=\tfrac{\alpha}{2}+\gamma,$$

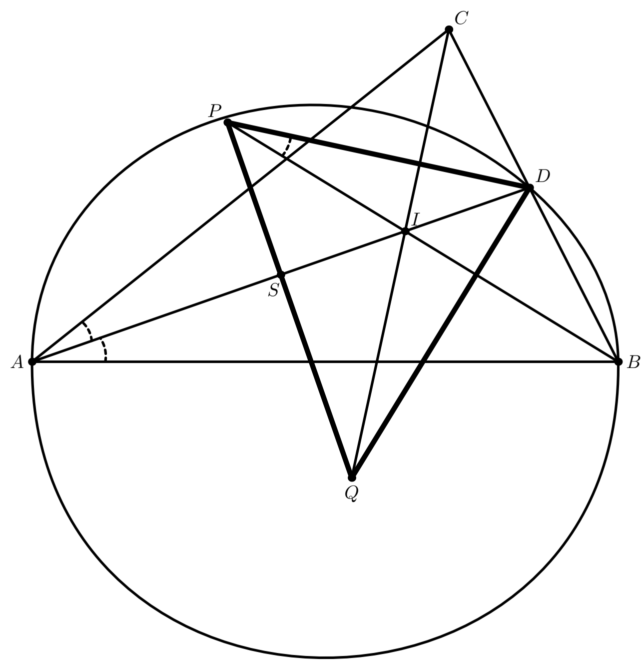
z których wynika, że $DB<AB$ (naprzeciwko mniejszego kąta leży krótszy bok). W tymże trójkącie punkt I, jako spodek dwusiecznej BI, dzieli bok DA w stosunku $DI:IA=DB:AB<1$. Punkt ten leży więc między punktami D i S. Wobec tego leży też między punktami B i P. Zatem kąt PIC jest kątem zewnętrznym trójkąta CIB i zachodzi równość $\sphericalangle PIC = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$.

Rozważmy okrąg opisany na trójkącie ABD. Dwusieczna $BI^{\rightarrow}$ przecina go w środku tego łuku o końcach A i D, który nie zawiera punktu B. Również symetralna cięciwy AD przechodzi przez ten środek. Jedynym punktem wspólnym owej symetralnej i prostej BI jest punkt P (proste te nie pokrywają się, skoro pierwsza z nich nie przechodzi przez punkt I). Punkt P leży więc na rozważanym okręgu po tej samej stronie prostej BD co punkt A. Stąd otrzymujemy $\sphericalangle DPB = \sphericalangle DAB$, czyli $\sphericalangle DPI = \frac{\alpha}{2}$.

Łącząc uzyskane związki, otrzymujemy równość

$$\sphericalangle DPI + \sphericalangle PIC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ.$$

Wynika z niej, że prosta IC (czyli prosta QI) jest prostopadła do prostej PD. Zawiera więc wysokość trójkąta PQD. Inną wysokością tego trójkąta jest odcinek DS, przechodący przez punkt I. Oznacza to, że wysokości trójkąta PQD przecinają się w punkcie I. □



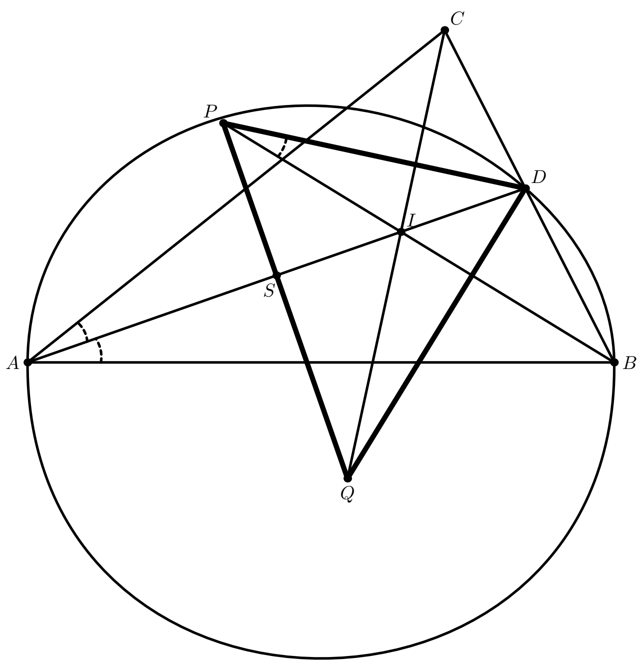
To było rozwiązanie „firmowe" — jest na stronie internetowej OM. Jak zwykle można rozwiązać to nieco inaczej. Różne rozwiązania warto pokazywać uczniom. Powinni wiedzieć, że na ogół zadanie można rozwiązać wieloma sposobami.

Niech S będzie środkiem odcinka AD. Ponieważ AD jest dwusieczną, więc $\frac{CD}{DB} = \frac{CA}{AB}$. Stąd i z nierówności trójkąta wynika, że $BD = =\frac{AB \cdot BC}{CA+AB} < \frac{AB \cdot BC}{CB} = AB$. Stąd i z twierdzenia o dwusiecznej wynika, że $\frac{DI}{IB} = \frac{DB}{AB} < 1$, więc punkt I leży między punktami S i D. Wobec tego leży też między punktami P i B oraz między punktami Q i C. Oznaczmy jak zwykle $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ i $\sphericalangle BCA = \gamma$. Z twierdzenia o sumie kątów trójkąta wynikają równości i nierówności $\sphericalangle AIP = \sphericalangle DIB = \frac{\alpha+\beta}{2} < 90^\circ$, $\sphericalangle QIA = \sphericalangle DIC = \frac{\alpha+\gamma}{2} < 90^\circ$ i $\sphericalangle BIQ = \sphericalangle CIP = \frac{\beta+\gamma}{2} < 90^\circ$. Wobec tego symetralna odcinka AD nie jest równoległa do dwusiecznej CI, więc Q jest jedynym punktem wspólnym tych prostych. Podobnie P jest jedynym punktem wspólnym prostej BI i symetralnej odcinka AD. Dwusieczna $BI^{\rightarrow}$ przecina okrąg opisany na trójkącie ABD w środku tego łuku L o końcach AD, który nie zawiera punktu B. Również symetralna cięciwy AD przechodzi przez ten środek. Stąd wynika, że punkt P jest środkiem łuku L, zatem na czworokącie $ABDP$ można opisać okrąg. Podobnie na czworokącie $AQDC$. Wynika stąd $\sphericalangle DPB = \sphericalangle DAB = \frac{\alpha}{2}$. Wobec tego

$\sphericalangle DPI + \sphericalangle PIC = \sphericalangle DPB + \sphericalangle PIC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2} = 90°$, a stąd wynika natychmiast, że prosta IC (czyli prosta QI) jest prostopadła do prostej PD, więc zawiera wysokość trójkąta PQD. Inną wysokością tego trójkąta jest odcinek DS, który zawiera punkt I. Oznacza to, że wysokości trójkąta PQD przechodzą przez punkt I. $\square$

Uwaga. Trójkąt PQD jest ostrokątny, bo $\sphericalangle DPQ = \frac{\alpha+\gamma}{2}$, $\sphericalangle PQD = \frac{\alpha+\beta}{2}$ i $\sphericalangle QDP = \frac{\gamma+\beta}{2}$

A teraz pokażemy rozwiązanie trygonometryczne. Głównym narzędziem będzie twierdzenie sinusów, kiedyś znane każdemu (no może prawie) maturzyście.



Przyjmijmy, że średnica okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równa 1 — to nie wpływa na ogólność rozważań, bo można zastąpić dany trójkąt podobnym do niego. Oznaczmy kąty trójkąta ABC literami α, β i γ. Mamy więc $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, zatem $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 90°$. Z twierdzenia sinusów wynika, że $AB = \sin\gamma$, $BC = \sin\alpha$, $CA = \sin\beta$. Kąt ostry między dwusiecznymi wychodzącym z wierzchołków A i B jest równy $\frac{\alpha+\beta}{2}$ a kąt ADB — $\gamma + \frac{\alpha}{2}$, więc (twierdzenie sinusów dla wielu trójkątów)

$BD = \frac{AB \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})} = \frac{\sin\gamma \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})}$ $(\triangle ABD)$,

$AI = \frac{AB\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\sin\gamma\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = 2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ $(\triangle ABI)$,

$DI = \frac{BD\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\sin\gamma\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})\cdot\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})}$ $(\triangle BDI)$,

$$SI = AI - \frac{AI+ID}{2} = \frac{AI-ID}{2} = \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)}\left(\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma) - \sin\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)} = \frac{2\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)}.$$

$$QS = SI\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2} = SI\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)} = \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)} = \frac{\sin\beta\sin\gamma\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\gamma}{2}\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)} =$$

$$= \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)}\cdot\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2}AD\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = SD\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Stąd wnioskujemy, że $\sphericalangle SDQ = \frac{\gamma}{2}$, więc $\sphericalangle DIB + \sphericalangle SDQ = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 90°$, zatem $BI \perp DQ$, co dowodzi, ze prosta BI zawiera wysokość trójkąta DPQ zaczynającą się w wierzchołku P. $\square$

A teraz jeszcze jedno rozwiązanie. Będziemy dodawać, odejmować punkty płaszczyzny

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

i mnożyć je skalarnie:

$$(a,b)\cdot(c,d)=ac+bd\,,$$

więc iloczyn skalarny dwóch punktów, traktowanych jako wektory o początku $(0,0)$, jest liczbą.

Wektor (a,b) jest prostopadły do wektora (c,d) wtedy i tylko wtedy, gdy (twierdzenie Pitagorasa) $a^2+b^2+c^2+d^2=(a-c)^2+(b-d)^2==a^2-2ac+c^2+b^2-2bd+d^2$, czyli gdy

$$(a,b)\cdot(c,d)=ac+bd=0.$$

Dla każdego punktu P prostej BI istnieje dokładnie jedna taka liczba $x\in\mathbb{R}$, że

$$P=I+x(B-I)=xB+(1-x)I.$$

W dalszym ciągu P oznacza punkt z treści zadania.

Niech $S=\frac12A+\frac12D$, czyli S jest środkiem odcinka AD. Znajdziemy taką liczbę x, że

$$(P-S)\cdot(D-A)=0,$$

a potem sprawdzimy, że $(P-D)\cdot(C-I)=0$, więc że I leży na wysokości trójkąta DPQ wychodzącej z wierzchołka P. Punkt I leży też na wysokości tego trójkąta wychodącej z wierzchołka D. Dwie wysokości przechodzą przez punkt I, więc trzecia też.

Udowodnimy, że[3]

$$(B-A)\cdot(C-A)=\tfrac12(b^2+c^2-a^2),$$
$$(A-B)\cdot(C-B)=\tfrac12(a^2+c^2-b^2),$$
$$(A-C)\cdot(B-C)=\tfrac12(a^2+b^2-c^2).$$

Mamy

$$a^2=(B-C)\cdot(B-C)=(B-A+A-C)\cdot(B-A+A-C)=$$
$$=(B-A)\cdot(B-A)+2(B-A)\cdot(A-C)+(A-C)\cdot(A-C)=$$
$=c^2+b^2-2(B-A)\cdot(C-A)$, więc $(B-A)\cdot(C-A)=\frac12(b^2+c^2-a^2)$.

Analogicznie uzasadniamy następne dwa wzory.

Z twierdzenia o dwusiecznej wynika od razu, że

$$D=\tfrac{1}{b+c}(bB+cC),\ I=\tfrac{1}{a+b+c}\big(aA+(b+c)D\big)=\tfrac{1}{a+b+c}(aA+bB+cC).$$

Mamy też:

$S=\frac12(A+D)=\frac{1}{2(b+c)}\big((b+c)A+bB+cC\big)$, a także
$P-I=x(B-I)=\frac{x}{a+b+c}\big(a(B-A)+c(B-C)\big)$,
$D-A=\frac{1}{b+c}\big(b(B-A)+c(C-A)\big)$,
$I-S=\frac{1}{a+b+c}\big(aA+bB+cC\big)-\frac{1}{2(b+c)}\big((b+c)A+bB+cC\big)=\frac{b+c-a}{2(b+c)(a+b+c)}\big(b(B-A)+c(C-A)\big)$,
zatem ma być spełniona równość

$$0=(P-S)\cdot(D-A)=\big((P-I)-(S-I)\big)\cdot(D-A)=(P-I)(D-A)+(I-S)(D-A)=$$
$$=\tfrac{x}{(b+c)(a+b+c)}\big(a(B-A)+c(B-C)\big)\cdot\big(b(B-A)+c(C-A)\big)+$$
$$+\tfrac{b+c-a}{2(b+c)^2(a+b+c)}\big(b(B-A)+c(C-A)\big)\big(b(B-A)+c(C-A)\big)=$$
$$=\tfrac{x}{(b+c)(a+b+c)}\big(abc^2+\tfrac{ac}{2}(b^2+c^2-a^2)+\tfrac{bc}{2}(a^2+c^2-b^2)-$$
$$-\tfrac{c^2}{2}(a^2+b^2-c^2)\big)+\tfrac{b+c-a}{2(b+c)^2(a+b+c)}\big(2b^2c^2+bc(b^2+c^2-a^2)\big)=$$
$$=\tfrac{cx}{2(b+c)(a+b+c)}\big(2abc+a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)-$$

[3]Te równości to w zasadzie twierdzenie kosinusów.

$$- c(a^2+b^2-c^2)\big) + \tfrac{bc(b+c-a)}{2(b+c)^2(a+b+c)}\big(2bc+b^2+c^2-a^2\big) =$$
$$= \tfrac{cx}{2(b+c)(a+b+c)}\big(a(b+c)^2 - a^3 + (b-c)(a^2-bc-b^2-bc-c^2)\big) + \tfrac{bc(b+c-a)}{2(b+c)^2(a+b+c)}\big((b+c)^2-a^2\big) =$$
$$= \big((b+c)^2-a^2\big)\Big(\tfrac{cx}{2(b+c)(a+b+c)}\big(a-(b-c)\big) + \tfrac{bc(b+c-a)}{2(b+c)^2(a+b+c)}\Big) =$$
$$= \tfrac{c((b+c)^2-a^2)}{2(b+c)^2(a+b+c)}\big(x(b+c)(a+c-b) + b(b+c-a)\big),$$
więc $x = -\frac{b(b+c-a)}{(b+c)(a+c-b)}$ — uff! [4]

Mamy
$$P - D = xB + (1-x)I - D = x(B-I) + I - D = \tfrac{x}{a+b+c}\big((a+c)B - aA - cC\big) +$$
$$+ \tfrac{1}{(b+c)(a+b+c)}\big((b+c)(aA+bB+cC) - (a+b+c)(bB+cC)\big) =$$
$$= \tfrac{1}{(b+c)(a+b+c)}\Big(x(b+c)\big[(a+c)(B-C) - a(A-C)\big] + a\big[(b+c)(A-C) - b(B-C)\big]\Big)$$
oraz $I - C = \frac{1}{a+b+c}\big(a(A-C) + b(B-C)\big)$. Wobec tego
$$(b+c)(a+b+c)^2(P-D)(I-C) =$$
$$= \Big(x(b+c)\big[(a+c)(B-C) - a(A-C)\big] +$$
$$+ a\big[(b+c)(A-C) - b(B-C)\big]\Big)\cdot\big(a(A-C) + b(B-C)\big) =$$
$$= x(b+c)\big[a^2b(a+c) - a^2b^2 + \tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)(a(a+c) - ab)\big] +$$
$$+ a\big[ab^2(b+c) - a^2b^2 + \tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)(b(b+c) - ab)\big] =$$
$$= \tfrac{1}{2}xa(b+c)(a+c-b)\big[2ab + a^2 + b^2 - c^2\big] + \tfrac{1}{2}ab(b+c-a)(2ab+a^2+b^2-c^2) =$$
$= \frac{1}{2}a(2ab+a^2+b^2-c^2)\big(x(b+c)(a+c-b) + b(b+c-a)\big) = 0$ dla $x = -\frac{b(b+c-a)}{(b+c)(a+c-b)}$, co dowodzi twierdzenia.

Ostatni dowód jest długawy, ale z drugiej strony dosyć bezmyślny, więc możliwy do przeprowadzenia w domu. W czasie zawodów w ograniczonym czasie dostępny tylko dla tych, którzy potrafią swoje obliczenia sensownie organizować. Może jednak warto uczyć młodych ludzi sensownego zapisywania swych myśli. Rozwiązanie trygonometryczne jest krótsze, też bez pomysłów, ale wymaga nieco lepszej znajomości trygonometrii. Najkrótsze, pierwsze rozwiązanie jest oparte na pomyśle, który w miarę łatwo przychodzi do głowy tym, którzy zajmują się intensywnie geometrią elementarną w wydaniu klasycznym, ale trudnym dla innych osób.

[4] Zamieniejąc b z c i jednocześnie B z C otrzymujemy $y = -\frac{c(b+c-a)}{(b+c)(a+b-c)}$ i $Q = yI + (1-y)C$, ale ten rezultat nie będzie nam potrzebny.