# Pochodne

**Wieszam z opóźnieniem i zamiarem uzupełnienia tego tekstu w najbliższych dniach kilkoma dopiskami i rysunkami.**

Do szkół „wracają” pochodne. Kiedyś były w programach, wcześniej ich nie było. Potem znów nie było i teraz będą. Przynajmniej przez jakiś czas. Skąd wzięły się owe obiekty. Otóż pewien Francuz, Pierre de Fermat (1601 — 1665), zajmował się m. in. znajdowaniem największych i najmniejszych wartości funkcji, np. wielomianów trzeciego, czwartego stopnia. Zajmował się też stycznymi do krzywych, które leżały po jednej stronie stycznej. Wtedy szukanie punktu styczności to też szukanie minimum, np. różnicy współrzędnych punktu na wykresie funkcji i na prostej. René Descartes (Kartezjusz, 1596 — 1650) patrzył na styczną jak na granicę (wtedy jeszcze ścisłej definicji granicy nie było, a zajmowali się nimi jedynie nieliczni czołowi matematycy usiłując jakoś uściślać swe intuicyjne rozumowania) prostych przechodzących przez dwa punkty krzywej, jeden był ustalony, a drugi do niego zbliżał się. Uściślenia pojawiły się wiele lat po jego śmierci. Pokażę na przykładach, jak znajdowano wtedy wartości największe i najmniejsze.

Powiedzmy, że interesuje nas najmniejsza i największa wartość wielomianu $x^3 - 9x^2 + 15x$ na przedziałach $[0,6]$ i $[-2,6]$. Niech $f(x) := x^3 - 9x^2 + 15x$. Załóżmy, że $f(p)$ jest najmniejszą wartością funkcji $f$ w punkcie $p$. Wtedy dla wszystkich $x$ z interesującego nas przedziału zachodzi nierówność

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x \geq p^3 - 9p^2 + 15p = f(p), \text{ czyli}$$

$$0 \leq x^3 - 9x^2 + 15x - (p^3 - 9p^2 + 15p) = (x-p)\big(x^2 + xp + p^2 - 9(x+p) + 15\big).$$

Oznacza to, że dla każdego $x < p$ zachodzi nierówność $x^2 + xp + p^2 - 9(x+p) + 15 \leq 0$, a dla $x > p$ — nierówność $x^2 + xp + p^2 - 9(x+p) + 15 \geq 0$. Stąd płynie wniosek:

$$0 = p^2 + p \cdot p + p^2 - 9(p+p) + 15 = 3p^2 - 18p + 15 = 3(p^2 - 6p + 5) = 3(p-1)(p-5),$$

zatem najmniejszą wartość funkcja $f$ może przyjmować jedynie w punktach 1, 5 lub w końcu przedziału. Rozumowanie opierające się na rozpatrywaniu znaku długiego wyrażenia po **obu** stronach punktu $p$ nie może przecież dotyczyć końca przedziału.

W wypadku przedziału $[0,6]$ w grę wchodzą więc liczby 0, 7, $-25$ i $-18$. Najmniejsza z nich to $f(5) = -25$, zatem to jest najmniejsza wartość funkcji $x^3 - 9x^2 + 15x$ na przedziale $[0,6]$. Uwaga: **jeśli** ten wielomian na tym przedziale ma najmniejszą wartość. Podane rozumowanie — dobre w XVII wielu — dziś budzi drobny niedosyt. Trzeba je uzupełnić. Można powołać się na twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów przez funkcję ciągłą na domkniętym przedziale. To nie jest jedyna metoda. Pokażemy inną, bo w szkole twierdzenia o osiąganiu kresów nie ma: w podstawie programowej ciąg liter *ciągł* występuje tylko raz, co oznacza, że ciągłością funkcji uczniowie nie muszą się zajmować. Na razie możemy sformułować hipotezę

$$x^3 - 9x^2 + 15x \geq -(-25) \text{ i udowodnić ją:}$$

$$0 \leq x^3 - 9x^2 + 15x - (-25) = (x-5)(x^2 - 4x - 5) = (x-5)(x+1)(x-5) = (x+1)(x-5)^2,$$

co kończy dowód, bo na przedziale $[0,6]$ zachodzą nierówności $x + 1 > 0$ i $(x-5)^2 \geq 0$. Znaleźliśmy najmniejszą wartość funkcji na przedziale $[0,6]$.

To samo rozumowanie, z niewielką zmianą, przekonuje nas o tym, że największą wartością funkcji $x^3 - 9x^2 + 15x$ na przedziale $[0,6]$ jest liczba 7.

Zmiana przedziału na $[-2,6]$ nie zmienia rozumowania poza końcówką. Teraz najmniejsza wartością staję się $f(-2) = -74$, a największą pozostaje $f(1) = 7$.

W rzeczywistości Fermat postępował nieco inaczej: pisał $p+h$ zamiast $x$, otrzymywał więc równość $f(x) = f(p+h) = p^3 - 9p^2 + 15p + (3p^2 - 18p + 15)h + (3p-9)h^2 + h^3$, a potem stwierdzał, że $h^2$ i $h^3$ są w zasadzie tak małe, że można je zlekceważyć, co prowadziło do wniosku, że $3p^2 - 18p + 15 = 0$, bo inaczej po różnych stronach punktu $p$ czyli dla $h$ o różnych znakach, liczby $f(p+h) - f(p)$ miałyby różne znaki. Było więc to rozumowanie lokalne. W zasadzie prowadziło do wzoru Taylora (1685 — 1731), ale oczywiście dopiero po kilkudziesięciu latach.

Rozwiążemy następny bardzo znany problem. Dane są punkty $P$ i $Q$ na płaszczyźnie leżące po tej samej stronie prostej $\ell$ w odległościach $a > 0$ i $b > 0$ od niej. Odległość ich rzutów prostopadłych na prostą $\ell$ jest równa $c > 0$. Znaleźć na tej prostej punkt $X$, dla którego suma odległości $XP + XQ$ jest najmniejsza.
Jasne jest, że $X$ leży na odcinku, którego końcami są rzuty prostopadłe $P'$ i $Q'$ punktów $P$ i $Q$ na prostą $\ell$. Załóżmy, że punkt $X$ leży w odległości $x \geq 0$ od punktu $P'$, więc w odległości $c - x \geq 0$ od punktu $Q'$. Wtedy $XP + XQ = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$. Zmieniamy $x$ o wielkość $h \in [-x, c-x]$. Suma odległości zmieniła się więc o wielkość

$$\sqrt{a^2 + (x+h)^2} + \sqrt{b^2 + (c-x-h)^2} - \sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{b^2 + (c-x)^2} =$$

$$= \frac{2xh + h^2}{\sqrt{a^2+(x+h)^2} + \sqrt{a^2+x^2}} + \frac{-2(c-x)h + h^2}{\sqrt{b^2+(c-x-h)^2} + \sqrt{b^2+(c-x)^2}} =$$

$$= h\left(\frac{2x+h}{\sqrt{a^2+(x+h)^2} + \sqrt{a^2+x^2}} + \frac{-2(c-x)+h}{\sqrt{b^2+(c-x-h)^2} + \sqrt{b^2+(c-x)^2}}\right).$$

Aby w punkcie $x \in (0, c)$ funkcja $\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$ miała najmniejszą wartość wyrażenie w nawiasie musi zerować się dla $h = 0$, czyli musi być spełniona równość

$$\frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a^2+x^2}} + \frac{-2(c-x)}{\sqrt{b^2+(c-x)^2} + \sqrt{b^2+(c-x)^2}} = 0 \quad \text{czyli} \quad \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}.$$

Okazało się, że kosinusy kątów $\sphericalangle P'XP$ i $\sphericalangle Q'XQ$ są równe, więc te kąty (ostre!) też są równe.

To zadanie ma sens fizyczny. Wedle zasady Fermata światło porusza się z punktu $P$ do punktu $Q$ po takiej trajektorii, po której ruch trwa najkrócej. Jeśli prosta $\ell$ pełni rolę lustra, to promień światła odbija się od tego lustra w taki sposób, że *kąt padania jest równy kątowi odbicia*. Dotyczy to nie tylko zwierciadła płaskiego, ale też zwierciadła, którego kształt opisać można jako wykres funkcji różniczkowalnej. Chodzi o kąt między styczną do wykresu, a raczej — tak wolą fizycy — między normalną (czyli prostopadłą do stycznej), a promieniem światła.

Podobne zadanie brzmi tak:
*znaleźć punkt, w którym promień światła wypuszczony z punktu $P$ leżącego po jednej stronie prostej $\ell$ przechodzi przez punkt $Q$ znajdujący się po przeciwnej stronie prostej $\ell$ wiedząc, że:*

*odległość punktu $P$ od prostej $\ell$ równa jest $a$, a odległość punktu $Q$ od niej — $b$ oraz że*

*prędkość światła w półpłaszczyźnie zawierającej punkt $P$ jest równa $v$, a w półpłaszczyźnie zawierającej punkt $Q$ — $w$,*

*światło porusza się z punktu $P$ do punktu $Q$ po takiej trajektorii, po której ruch trwa najkrócej.*

Jasne jest, że promień przetnie prostą $\ell$ pomiędzy punktami $P'$ i $Q'$ — rzutami prostopadłymi punktów $P$ i $Q$ na prostą $\ell$. Oznaczmy odległość punktów $P'$ i $Q'$ przez $c$. Załóżmy, że światło przechodzi przez punkt $X$ znajdujący się w odległości $x \in [0, c]$ od punktu $P'$, więc w odległości $c - x$ od punktu $Q'$. Czas zużyty na przemieszczenie się z punktu $P$ do punktu $Q$ jest równy $T(x) = \frac{1}{v}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{w}\sqrt{b^2 + (c-x)^2}$. Rachując jak poprzednio otrzymujemy równość

$$T(x+h) - T(x) = h\left(\frac{2x+h}{v\left(\sqrt{a^2+(x+h)^2}+\sqrt{a^2+x^2}\right)} + \frac{-2(c-x)+h}{w\left(\sqrt{b^2+(c-x-h)^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}\right)}\right).$$

Wynika stąd, że aby wartość funkcji $T$ w punkcie $x$ była najmniejsza, musi zachodzić równość

$$\frac{x}{v\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{w\sqrt{b^2+(c-x)^2}}.$$

Jeśli $\alpha = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle P'XP$ i $\beta = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle Q'XQ$, to warunek można zapisać w postaci: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v}{w}$. Wzór jest znany prawo załamania światła (Snelliusa czyli Snella, 1580 — 1626), podane wyprowadzenie pochodzi od Fermata. Znane było jednak wcześniej w nieco innym sformułowaniu Persowi zwącemu się Ibn Sahl (940 — 1000) — czasem Europa spóźnia się trochę.

Z pierwszego zadania geometrycznego wynika w szczególności, że jeśli wśród trójkątów wpisanych w dany trójkąt, istnieje trójkąt o najmniejszym obwodzie, to jego boki tworzą równe kąty z bokami danego trójkąta. Jeśli tym minimalnym trójkątem wpisanym w trójkąt $ABC$ jest trójkąt $KLM$, przy czym punkt $K$ leży na boku $BC$, $L$ — na boku $CA$, $M$ — na boku $AB$, to $\sphericalangle AML = \sphericalangle BMK =: \gamma$, $\sphericalangle BKM = \sphericalangle CKL =: \alpha$ i $\sphericalangle CLK = \sphericalangle ALM =: \beta$. Wynikają stąd równości

$$\alpha + \gamma = 180^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC + \sphericalangle BCA,$$
$$\alpha + \beta = 180^\circ - \sphericalangle ACB = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CBA,$$
$$\beta + \gamma = 180^\circ - \sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA + \sphericalangle BCA.$$

Odejmując dwie pierwsze otrzymujemy $\gamma - \beta = \sphericalangle BCA - \sphericalangle CBA$. Dodając ją do trzeciej równości otrzymujemy: $2\gamma = 2\sphericalangle BCA$, czyli $\gamma = \sphericalangle BCA$. Stąd wynika, że $\alpha = \sphericalangle BAC$ oraz $\beta = ABC$ $\sphericalangle AML = \sphericalangle BMK = \sphericalangle BCA$, $\sphericalangle BKM = \sphericalangle CK \sphericalangle CAB$ i $\sphericalangle CLK = \sphericalangle ALM = \sphericalangle ABC$. Z nich z kolei można wywnioskować, że

$$\Delta MBK \sim \Delta CBA, \qquad \Delta KCL \sim \Delta ACB \quad \text{oraz} \quad \Delta LAM \sim \Delta BAC.$$

Niech $BM = x$, $CK = y$, $AL = z$, $AB = c$, $BC = a$ i $CA = b$. Z podobieństw trójkątów otrzymujemy $\frac{a-y}{x} = \frac{c}{a}$, $\frac{b-z}{y} = \frac{a}{b}$, $\frac{c-x}{z} = \frac{b}{c}$, czyli $ay + cx = a^2$, $bz + ay = b^2$, $cx + bz = c^2$. Wobec tego $ay + bz + cx = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$. Wnioskujemy stąd, że $ay = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$. Oznacza to, że

$$CK = y = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} = b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = b \cdot \cos\sphericalangle ACB\,.$$

Punkt $K$ jest więc spodkiem wysokości z wierzchołka $A$. Analogicznie $L$ jest spodkiem wysokości z wierzchołka $B$, a $M$ — z wierzchołka $C$. poprowadzone $AM$, $BK$ i $CL$ w zależności od boków wyjściowego trójkąta. Przy okazji trójkąt minimalny $KLM$ istnieje, gdy trójkąt $ABC$ jest ostrokątny. Widać więc, że zadanie można rozwiązać w miarę krótko nawet, gdy nie jest się matematykiem klasy Fejéra, Schwarza lub Fermata.

**Uwaga 1.** Z rozumowania wynika jasno, że aby trójkąt $KLM$ spełniał warunek konieczny, by minimalizować obwód, kąty trójkąta $ABC$ muszą być ostre. W wypadku trójkąta prostokątnego lub rozwartokątnego nie istnieje trójkąt o najmniejszym obwodzie, co wynika z tego, co napisaliśmy wcześniej. Obwód nie może być mniejszy niż $2h_c$, gdzie $h_c$ oznacza wysokość poprowadzoną z wierzchołka $C$, jeśli $\sphericalangle ACB \geqslant 90^\circ$. Nie podajemy dowodu tego faktu, bo nie jest on celem naszych rozważań.

**Uwaga 2.** Czysto geometryczne i bardzo eleganckiego rozwiązanie zadania o trójkącie o najmniejszym obwodzie podał L. Fejér chyba w początku dwudziestego wieku. Jest ono podawane licznych książkach i artykułach. Autor tego tekstu poznał je ze wspaniałej książki „O liczbach i figurach" napisanej przez H. Rademachera i O.Toepplitza wydanej w Polsce przez PWN w 1956 r. (w Niemczech wydano ją w 1930 r. ) Przytoczę to rozumowanie.

Zakładamy, że trójkąt $ABC$ jest ostrokątny, punkt $K$ leży na boku $BC$, $L$ — na boku $CA$, $M$ — na boku $AB$. Znajdziemy najpierw takie punkty $K, L$, że przy ustalonym punkcie $M$ obwód trójkąta $KLM$ będzie najmniejszy. Niech $M_A$ i $M_B$ będą punktami symetrycznymi do punktu $M$ względem prostych $CA$ i $CB$. Zachodzi oczywista równość $\sphericalangle M_ACM_B = 2\sphericalangle ACB$. Wobec tego $\sphericalangle M_ACM_B < 180^\circ$. Wynika stąd, że prosta $M_AM_B$ przecina półproste $CA^{\to}$ i $CB^{\to}$. Ponieważ punkty $M_A, M_B$ leżą po tej samej stronie prostej $AB$ co punkt $C$, więc prosta $M_AM_B$ przecina odcinki $AC$ i $BC$. Punkty przecięcia oznaczamy symbolami $K_A$, $L_B$. Mamy $ML = M_AL$ i $MK = M_BK$, więc długość łamanej $M_ALKM_B$ jest równa obwodowi trójkąta $MLK$, a długość odcinka $M_Am_B$ — obwodowi trójkąta $ML_BK_A$. Wobec tego trójkąt $ML_BK_A$ ma najmniejszy obwód spośród trójkątów $MLK$, przy ustalonym $M$.

Mamy $CM_A = CM = CM_B$, więc trójkąt $M_ACM_B$ jest równoramienny. Najkrótsze ramię, więc i podstawę (wielkość kąta $M_ACM_B$ nie zależy od wyboru punktu $M \in AB$) ma on, gdy odcinek $CM$ jest wysokością trójkąta $ABC$. Wobec tego najmniejszy obwód ma trójkąt $K_AML_B$, gdy odcinek $CM$ jest wysokością trójkąta $ABC$. Z rozumowania wynika, że trójkąt o najmniejszym obwodzie jest jedyny, zatem również punkty $K$ i $L$ muszą być spodkami wysokości trójkąta $ABC$. $\square$

Podobnie jest z poszukiwaniem punktu $X$ w danym trójkącie $ABC$, którego suma odległości $AX + BX + CX$ od wierzchołków danego trójkąta jest najmniejsza (to zadanie pochodzące od Fermata rozwiązał Torricelli, 1608 — 1647). Załóżmy, że $X$ jest właśnie takim punktem i że leży wewnątrz trójkąta $ABC$. Oznaczmy jego odległości od wierzchołków $A, B, C$ przez $k, \ell, m$. Niech $\alpha = \pi - \sphericalangle AXC$, $\beta = \pi - \sphericalangle BXC$. Zastąpmy punkt $X$ punktem $X'$ leżącym na prostej $CX$ w odległości $m + x$ od wierzchołka $C$, jeśli $x > 0$, odsuwamy się od $C$, a jeśli $x < 0$ zbliżamy się do $C$. W obu przypadkach, przy założeniu, że $|x|$ jest na tyle małą liczbą dodatnią, że punkt $X'$ jest wewnątrz trójkąta $ABC$, możemy napisać: $AX' = \sqrt{k^2 + x^2 - 2kx\cos\alpha}$, $BX' = \sqrt{\ell^2 + x^2 - 2\ell x\cos\alpha}$ i $CX' = m + x$. Oznacza to, że
$AX' + BX' + CX' - (AX + BX + CX) =$
$$= \frac{x^2-2kx\cos\alpha}{\sqrt{k^2+x^2-2kx\cos\alpha}+k} + \frac{x^2-2\ell x\cos\beta}{\sqrt{\ell^2+x^2-2\ell x\cos\beta}+\ell} + x = x\left(\frac{x-2k\cos\alpha}{\sqrt{k^2+x^2-2kx\cos\alpha}+k} + \frac{x-2\ell\cos\beta}{\sqrt{\ell^2+x^2-2\ell x\cos\beta}+\ell} + 1\right).$$
Aby wyrażenie to przyjmowało swą najmniejszą dla $x = 0$, zawartość nawiasu dla $x = 0$ musi zerować się, czyli
$$0 = \frac{-2k\cos\alpha}{\sqrt{k^2}+k} + \frac{-2\ell\cos\beta}{\sqrt{\ell^2}++\ell} + 1 = -\cos\alpha - \cos\beta + 1, \quad \text{więc} \quad \cos\alpha + \cos\beta = 1.$$
Jeśli $\gamma = \pi - \sphericalangle BXA$, to analogiczna analiza polegająca na przesuwaniu punktu $X$ wzdłuż

prostej $AX$, a potem — wzdłuż prostej $BX$ prowadzi do wniosku, że również $\cos\gamma + \cos\alpha = 1$ oraz $\cos\gamma + \cos\beta = 1$. Rozwiązując łatwy układ 3 równań liniowych otrzymujemy równości $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{2}$. Oznacza to, że $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. Wykazaliśmy, że jedynym punktem wewnętrznym trójkąta, w który suma odległości od wierzchołków trójkąta $ABC$ może mieć najmniejszą wartość jest punkt, z którego widać każdy z trzech boków trójkąta pod kątem $\frac{2\pi}{3}$ (czyli $120°$). Jest to punkt przecięcia trzech okręgów, więc można spodziewać się, że jest tylko jeden taki punkt, ale tego nie wykazaliśmy: ani istnienia (łatwe) ani jedyności (też nietrudne). Co gorsza to jedyny kandydat, ale dlaczego minimum ma w ogóle być osiągane? Ten sam problem dotyczy poprzednich dwóch rozumowań.

Problem istnienia minimum można rozwiązać albo w oparciu o wspomniane już twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów, ale szczególnie w ostatnich przykładach może to wymagać jego „wielowymiarowej wersji". Można też postępować nieco inaczej, ale wymaga to jeszcze jednego twierdzenia.

**Twierdzenie 3.** Jeśli funkcja $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału $P$, ma pochodną w każdym jego punkcie wewnętrznym i jest niemalejąca, to pochodna jest nieujemna w każdym punkcie $\mathrm{int}(P)$.

**Dowód.** $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, a ponieważ funkcja $f$ jest niemalejąca, więc $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ dla dowolnych $x, x+h \in P$, jeśli tylko $h \neq 0$. Granica funkcji nieujemnmej jest nieujemna (jeśli tylko istnieje). □

Ważne jest odwrócenie tego twierdzenia, ale jego dowód zwykle jest poza programem szkolnym, bo wymaga użycia twierdzenia o wartości średniej. To ostatnie twierdzenie zazwyczaj wnioskowane jest z twierdzenia Rolle'a, a to z kolei z twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów.

Sformułujmy najpierw twierdzenie, które pozwala stwierdzać monotoniczność funkcji w oparciu o własności jej pochodnej.

**Twierdzenie 4.** Jeśli funkcja $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału $P$ i ma pochodną w każdym jego punkcie wewnętrznym, to

jeśli $f'(x) \geq 0$ dla każdego $x \in \mathrm{int}(P)$, to funkcja $f$ jest niemalejąca na przedziale $P$;

jeśli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathrm{int}(P)$, to funkcja $f$ jest ściśle rosnąca;

jeśli $f'(x) \geq 0$ dla każdego $x \in \mathrm{int}(P)$ i między każdymi dwoma różnymi punktami $x_1, x_2 \in P$ leży taki punkt $x$, że $f'(x) > 0$, to funkcja $f$ jest ściśle rosnąca.

Widać, że trzecia część twierdzenia zawiera drugą. Tym nie mniej zaczniemy od uzasadnienia drugiej części tezy. Niech $x \in \mathrm{int}(P)$. Ponieważ $f'(x) > 0$, więc istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $0 < |h| < \delta$, to $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$, zatem jeśli $0 < h < \delta$, to $f(x+h) - f(x) > 0$, czyli $f(x+h) > f(x)$.

Niech $c_x \in P \cap (x, \infty)$ będzie największą taką liczbą, że jeśli $x < t \leq c_x$, to $f(t) > f(x)$. Jeśli $c_x$ jest prawym końcem przedziału $P$, to dla każdego $t \in P$ z nierówności $t > x$ wynika, że $f(t) > x$. Załóżmy, że $c_x \in \mathrm{int}(P)$. Wtedy $f'(c_x) > 0$, więc istnieje taka liczba $\eta$, że jeśli $0 < |h| < \eta$, to $0 < \frac{1}{h}(f(c_x + h) - f(c_x))$. Stąd wynika, że jeśli np. $x < s \leq c_x$, $c_x - s < \eta$

oraz $c_x < t < c_x + \eta$, to $f(x) < f(s) < f(c_x) < f(t)$, a to oznacza, że liczbę $c_x$ należy powiększyć przynajmniej o $\eta$, wbrew założeniu, że jej powiększyć się już nie da. Oznacza to, że $c_x$ jest prawym końcem przedziału $P$, więc dla każdego $t \in (x, \infty) \cap P$ zachodzi nierówność $f(x) < f(t)$. Udowodniliśmy, że twierdzenie zachodzi, gdy prawy koniec przedziału $P$ nie jest jego elementem.

Nie założyliśmy różniczkowalności funkcji w końcach przedziału $P$, a jedynie jej ciągłość. Trzeba zatem uzupełnić rozumowanie. Jeśli prawy koniec $b$ przedziału $P$ jest elementem przedziału $P$, to funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $b$, więc $f(b) = \lim_{t\to b^+} f(t)$. Z nierówności $x < s < t$ wynika, że $f(x) < f(s) < f(t)$, zatem $f(b) = \lim_{t\to b} f(t) \geq f(s) > f(x)$. Wobec tego dla każdego $t \in P$ z nierówności $t > x$ wynika, że $f(t) > f(x)$. Podobnie uzasadniamy, że jeśli $a$ jest lewy końcem $P$ i $a \in P$, to $f(x) < f(x)$ dla każdego $x \in P \cap (a, \infty)$, co kończy dowód drugiej części tezy. [1]

Pierwszą część tezy wywnioskować można z drugiej, już udowodnionej. Jeśli $\varepsilon > 0$, to $(f(x) + \varepsilon x)' = f'(x) + \varepsilon \geq \varepsilon > 0$. Wobec tego funkcja $x \mapsto f(x) + \varepsilon x$ jest ściśle rosnąca, zatem jeżeli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) + \varepsilon x_1 < f(x_2) + \varepsilon x_2$, więc $-\varepsilon(x_2 - x_1) < f(x_2) - f(x_1)$, a ponieważ ta nierówność zachodzi dla **każdej** dodatniej liczby $\varepsilon$, więc $f(x_2) - f(x_1) \geq \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \big(-\varepsilon(x_2 - x_1)\big) = 0$.

Została trzecia część tezy. Tu już jest łatwo. Z już udowodnionej części twierdzenia wynika, że jeśli $x_1 < x_2$ dla $x_1, x_2 \in P$, to $f(x_1) \leq f(x_2)$. Z założenia wynika, że istnieje taki punkt $x \in (x_1, x_2)$, że $f'(x) > 0$. Wobec tego istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $0 < |t - x| < \delta$, to $\frac{f(t)-f(x)}{t-x} > 0$. Wybierając punkty $t_1, t_2$ tak, że $x_1 < t_1 < x < t_2 < x_2$ otrzymujemy
$$f(x_1) \leq f(t_1) < f(x) < f(t_2) \leq f(x_2),$$
a stąd nierówność $f(x_1) < f(x_2)$ wynika natychmiast. □

**Uwaga 5.** Jeśli funkcja $f$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału $P$ i różniczkowalna w każdym jego punkcie wewnętrznym, to jest ściśle rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy gdy jej pochodna jest nieujemna a między każdymi dwoma punktami przedziału $P$ znajduje się punkt, w którym ta pochodna jest dodatnia — to zdanie wynika natychmiast z udowodnionych twierdzeń.

**Przykład 6.** Niech
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \ x = 0, \\ 2x + x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{dla } \ x \neq 0. \end{cases}$$
Z definicji pochodnej i z nierówności $|x^2 \sin \frac{1}{x^3}| \leq x^2$ wynika od razu, że $f'(0) = 0$. Mamy też $f'(x) = 2 + 2x \sin \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x} \cos \frac{1}{x^3}$ — na podstawie znanych wzorów (w większości nieobecnych w szkole). Niech $x_n = \sqrt{\frac{1}{2n\pi}}$. Wtedy $f'(x_n) = 2 - 2\sqrt{2n} < 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Funkcja $f$ ma więc dodatnią pochodną w punkcie 0, ale nie jest rosnąca w żadnym otoczeniu tego punktu: w każdym przedziale znajduje się punkt, w którym jej pochodna jest ujemna. Przy okazji: pochodna tej funkcji nie jest ciągła w punkcie 0. □

**Przykład 7.** Niech $a \geq b > 0$ będą liczbami rzeczywistymi. $P$ niech oznacza prostokąt, którego jeden bok ma długość $a$, a drugi — $b$. Z prostokąta $P$ wycinamy cztery kwadraty o boku

[1] Użyliśmy tu pewnika ciągłości w zakamuflowany sposób. Mianowicie zdefiniowaliśmy $c_x$ jako największą liczbę .... Jej istnienie wynika właśnie z pewnika ciągłości, ale trudno spodziewać się pytania o jej istnienie od zwykłego ucznia. W szkole dowód tego twierdzenia można pominąć, jednak w dobrych klasach powinien pojawiać się.

$x \in \left(0, \frac{b}{2}\right)$ zawierające cztery wierzchołki $P$ tak, że pole $P$ zmniejsza się o $4x^2$. Następnie zaginamy „wystające” części powstałego dwunastokąta (niewypukłego) tak, by powstało pudełko o wymiarach $a-2x,\ b-2x,\ x$. Dla jakiego $x$ pojemność otrzymanego pudełka będzie największa?

*Rozwiązanie.* Niech $V(x) = x(a-2x)(b-2x)$ będzie pojemnością pudełka. $V$ jest funkcją ciągłą, a nawet różniczkowalną w każdym punkcie swej dziedziny. Z punktu widzenia pojemności pudełka dziedziną funkcji $V$ jest przedział $\left(0, \frac{b}{2}\right)$, ale można tę funkcję rozpatrywać na przedziale domkniętym $\left[0, \frac{b}{2}\right]$. Na przedziale $\left[0, \frac{b}{2}\right]$ funkcja $V$, jako ciągła, przyjmuje wartość najmniejszą oraz wartość największą (później okaże się, że można obejść aię bez twierdzenia Weierstrassa).

Ponieważ $V(0) = V\left(\frac{b}{2}\right) = 0$ i $V(x) > 0$ dla $x \in \left(0, \frac{b}{2}\right)$, więc najmniejsza wartość przyjmowana jest w końcach przedziału $\left[0, \frac{b}{2}\right]$, zaś największa — w pewnym punkcie wewnętrznym $x_0$ tego przedziału.

Ponieważ funkcja $V$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0$, więc $V'(x_0) = 0$. Wystarczy zatem znaleźć punkty w przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$, w których pochodna funkcji $V$ przyjmuje wartość 0 i stwierdzić, w którym z nich $V$ ma największą wartość. Takie punkty są co najwyżej dwa, bo $V$ jest wielomianem trzeciego stopnia, więc $V'$ jest wielomianem kwadratowym.

$V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$. Wiemy, że ten wielomian ma co najmniej jeden pierwiastek w przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ (nie ma potrzeby sprawdzać, że jego wyróżnik jest dodatni, bo to wynika z istnienia $x_0$!).[2] Możemy teraz zastosować to samo rozumowanie do badania funkcji $V$ na przedziale $\left[\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right]$. Wewnątrz tego przedziału funkcja $V$ przyjmuje wartości ujemne, zeruje się w jego końcach. Wobec tego swą najmniejszą wartość na $\left[\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right]$ funkcja $V$ przyjmuje wewnątrz przedziału i wobec tego jej pochodna $V'$ przyjmuje wartość 0 w co najmniej jednym punkcie tego przedziału.

Z tego rozumowania wynika, że w każdym z przedziałów $\left(0, \frac{b}{2}\right)$, $\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$ pochodna $V'$ funkcji $V$ ma co najmniej jeden pierwiastek, a ponieważ $V'$ ma dokładnie dwa pierwiastki, więc w każdym z wymienionych przedziałów ma dokładnie jeden pierwiastek. Tak się dzieje, gdy $a > b$. Jeżeli $a = b$, to sytuacja jest nieco inna: $V'\left(\frac{b}{2}\right) = 0$, co sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem (ogólnie: jeśli liczba $x_1$ jest podwójnym pierwiastkiem funkcji $f$, tzn. $f(x) = (x-x_1)^2 g(x)$ dla pewnej funkcji $g$ różniczkowalnej w $x_1$, to $f(x_1) = 0 = f'(x_1)$) i wobec tego również w tym przypadku w przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ funkcja $V'$ może mieć co najwyżej jeden pierwiastek, więc ma dokładnie jeden. Udowodniliśmy w ten sposób, że w przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ funkcja $V'$ ma dokładnie jeden pierwiastek $x_0$, którym jest mniejszy z dwóch pierwiastków tej funkcji, a liczba $V(x_0)$ jest największą wartością funkcji $V$ przyjmowaną na przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$. Oczywiście $x_0 = \frac{4(a+b)-\sqrt{[4(a+b)]^2-4\cdot 12ab}}{2\cdot 12} = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$.

**Uwaga 8.** Nie zajmowaliśmy się znakiem pochodnej $V'$, bo nie było potrzeby ustalać na jakich przedziałach funkcja $V$ rośnie, a na jakich maleje. Oczywiście można było postąpić inaczej, w szkole wręcz należało stwierdzić, że na przedziale $(0, x_0)$ pochodna $V'$ funkcji $V$ jest dodatnia, więc $V$ na tym przedziale rośnie, a na przedziale $\left(x_0, \frac{b}{2}\right)$ pochodna $V'$ jest ujemna, więc na tym przedziale funkcja $V$ maleje. Z przedstawionego rozumowania to też wynika, bo na przedziale $(0, x_0)$ pochodna $V'$ nie przyjmuje wartości 0 , ma zatem ten sam znak we wszystkich

[2] Drugi pierwiastek wielomianu $V'$ też jest dodatni, bo iloczyn pierwiastków tego wielomianu jest równy $\frac{ab}{12}$, jest więc dodatni, zatem oba pierwiastki maja ten sam znak, ale z tego korzystać nie będziemy.

punktach tego przedziału, zatem funkcja $V$ jest na tym przedziale ściśle monotoniczna, nie może być malejąca, bo $V(x_0) > 0 = V(0)$, więc jest ściśle rosnąca, więc jej niezerująca się pochodna jest dodatnia. $\Box$

**Przykład 9.** Znaleźć maksimum objętości brył powstałych w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o obwodzie 1 wokół jego przeciwprostokątnej.

*Rozwiązanie*: Niech $a, b, c$ oznaczają boki trójkąta, przy czym $c$ to przeciwprostokątna. Bryła powstała w wyniku obrotu trójkąta wokół boku c to dwa stożki złączone podstawami. Promień tej wspólnej podstawy to wysokość trójkąta prostopadła do przeciwprostokątnej. Wysokość $h_c$, prostopadła do boku $c$, jest równa $\frac{ab}{c}$, bo pole trójkąta jest równe $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$. Suma wysokości tych stożków jest równa $c$. Wobec tego suma ich objętości jest równa $V = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{ab}{c}\right)^2 \cdot c = \frac{\pi(ab)^2}{3c}$.

Wiemy, że $a^2 + b^2 = c^2$ (tw. Pitagorasa) i $a + b + c = 1$ (dany obwód trójkąta). Wobec tego

$$2ab = (a+b)^2 - (a^2+b^2) = (1-c)^2 - c^2 = 1 - 2c.$$

Zachodzą więc wzory $V = V(c) = \frac{\pi(1-2c)^2}{12c} = \frac{\pi}{12}\left(\frac{1}{c} - 4 + 4c\right)$ i $V'(c) = \frac{\pi}{12}\left(\frac{-1}{c^2} + 4\right)$. Wobec tego $V'(c) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c = \pm\frac{1}{2}$, zatem kandydatami na punkt, w którym funkcja $V$ przyjmuje swą największą wartość, są $\frac{1}{2}$ oraz $-\frac{1}{2}$. Ponieważ $c$ jest długością boku trójkąta, więc $c > 0 > -\frac{1}{2}$. Liczba $\frac{1}{2}$ też nie wchodzi w grę, bo wtedy byłaby spełniona równość $a + b = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = c$, wbrew temu, że: *suma dwóch boków trójkąta jest większa od trzeciego.* Oznacza to, że funkcja $V$ jest ściśle monotoniczna na każdym przedziale zawartym w swej dziedzinie. Kresy są wartościami funkcji w końcach przedziału, jeśli końce są w dziedzinie. Musimy więc znaleźć dziedzinę funkcji $V$.

Liczby $a, b, c$ mają być bokami trójkąta prostokątnego o obwodzie 1. Muszą więc być dodatnimi rozwiązaniami układu równań: $a^2 + b^2 = c^2$, $a + b = 1 - c$. Warunek ten jest też dostateczny: jeśli $a, b, c > 0$ i $a^2 + b^2 = c^2$, to $(a+b)^2 > a^2 + b^2 = c^2$, zatem $a + b > c$ i oczywiście $a + c > c > b$ oraz $b + c > c > a$. Oznacza to, że z odcinków o długościach $a, b, c$ można zbudować trójkąt, oczywiście prostokątny. Ten układ równań równoważny jest następującemu:

$$a + b = 1 - c, \qquad ab = \frac{(1-c)^2 - c^2}{2} = \frac{1}{2} - c.$$

Liczby $a$ i $b$ są więc pierwiastkami równania kwadratowego $t^2 - (1-c)t + \frac{1}{2} - c = 0$. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by to równanie to miało dodatnie pierwiastki dla dodatniej wartości parametru $c$, jest $0 < c < \frac{1}{2}$ oraz

$$0 \leq \Delta = (1-c)^2 - 4\left(\tfrac{1}{2} - c\right) = -1 + 2c + c^2 = (c+1)^2 - 2$$

czyli $\sqrt{2} - 1 \leq c < \frac{1}{2}$. Ponieważ $V\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, więc największą wartością funkcji $V$ jest $V\left(\sqrt{2} - 1\right)$ — oczywiście maksymalna na przedziale $\left[\sqrt{2} - 1, \frac{1}{2}\right)$. Łatwo zauważyć, że dla $c = \sqrt{2} - 1$ otrzymujemy trójkąt równoramienny (bo $\Delta = 0$, więc pierwiastki równania kwadratowego $x^2 - (1-c)x + \frac{1}{2} - c = 0$, czyli liczby $a$ i $b$ są równe).

**Komentarz**: Ten przykład powinien przekonać uczniów o konieczności zwracania uwagi na dziedzinę funkcji. W tym zadaniu to nie tylko rytuał. Omawiałem to zadanie wielokrotnie na ćwiczeniach, jeszcze się nie zdarzyło, by studenci chcieli, aby objętość $V$ potraktować jako np. funkcję zmiennej $a$. Korzystalibyśmy wtedy z wzoru $V = V(a) = \frac{\pi a^2(1-2a)^2}{6(1-a)(1-2a+2a^2)}$. Maksimum osiągane byłoby w punkcie wewnętrznym dziedziny funkcji $V$, czyli przedziału $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, mianowicie w punkcie $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, zatem w punkcie zerowania się pochodnej funkcji $V$. Byłoby mniej kłopotu z dziedziną funkcji, za to więcej z obliczeniami. Często studenci nie potrafili stwierdzić, że ponieważ funkcja ma niezerową pochodną na przedziale, to jest na nim monotoniczna. Wydawało im się, że w obliczeniach był błąd, bo skoro w jakimś punkcie ma być maksimum, to pochodna musi się tam zerować zapominając, że to twierdzenie mówi o punktach **wewnętrznych** dziedziny. $\square$

**Przykład 10.** Znaleźć najkrótszy z odcinków, które dzielą pole trójkąta $ABC$ o bokach $a = BC = 4$, $b = CA = 5$, $c = AB = 6$ na połowy.

Naturalnym pomysłem jest założenie, że np. na bokach $CA$ i $AB$ wybrano punkty $Q$ i $P$ odpowiednio. Oznaczmy $y = AQ$, $x = AP$. Pole trójkąta $PQA$ jest połową pola trójkąta $BCA$ wtedy i tylko wtedy, gdy $yx = \frac{1}{2}bc$. Kwadrat długości odcinka $PQ$ jest równy (tw. kosinusów)

$$PQ^2 = x^2 + y^2 - 2xy\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = x^2 + y^2 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2} = (x+y)^2 - ab - \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$$

Chodzi więc o zminimalizowanie sumy $x + y$ przy założeniu, że $xy = \frac{bc}{2}$ i oczywiście $x, y > 0$. Mamy $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$. Wtedy oczywiście $x = y = \sqrt{\frac{bc}{2}}$. Oczywiście jest to możliwe wyłącznie wtedy gdy $\sqrt{\frac{bc}{2}} \leq b$ i $\sqrt{\frac{bc}{2}} \leq c$, czyli gdy $c \leq 2b$ i $b \leq 2c$, co akurat w wypadku rozpatrywanego trójkąta ma miejsce. Mamy wtedy $PQ^2 = \left(\sqrt{\frac{bc}{2}} + \sqrt{\frac{bc}{2}}\right)^2 - bc - \frac{b^2+c^2-a^2}{2} = bc - \frac{b^2+c^2-a^2}{2} = \frac{1}{2}\left(a^2 - (b-c)^2\right)$. Jasne jest, że wybierając punkty na innych parach boków otrzymamy liczby $\frac{1}{2}\left(b^2 - (c-a)^2\right)$ oraz $\frac{1}{2}\left(c^2 - (a-b)^2\right)$. Podstawiwszy odpowiednie liczby otrzymamy $\frac{15}{2}$, $\frac{21}{2}$ i $\frac{35}{2}$. Wobec to długość najkrótszezgo odcinka to $\sqrt{\frac{15}{2}}$.

**Uwaga 11.** Zadanie można zmieniać manipulując długościami boków trójkąta np. w taki sposób, by nie było możliwe wybranie odcinków równej długości na ramionach kąta. Trochę to skomplikuje analizę. $\square$

Można udowodnić w szkole:

**Twierdzenie 12.** Jeśli pierwsza pochodna funkcji jest ściśle rosnąca, to wykres funkcji leży nad styczną do siebie w każdym punkcie.

Można, bo dowód wygląda tak $\Big(f(x) - \big(f'(p)(x-p) + f(p)\big)\Big)' = f'(x) - f'(p)$, więc ta pochodna jest dodatnia dla $x > p$, zaś dla $x < p$ — jest ujemna. Wobec tego najmniejszą wartością funkcji $x \mapsto f(x) - \big(f'(p)(x-p) + f(p)\big)$ jest $f(p) - \big(f'(p)(p-p) + f(p)\big) = 0$. $\square$

Z tego twierdzenia wynika łatwo

**Twierdzenie 13.** Jeśli pierwsza pochodna funkcji $f$ jest ściśle rosnąca, to dla każdego punktu $y$ z dziedziny funkcji $f$, przekształcenie $x \mapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ jest rosnące.

Dla dowodu należy zróżniczkować iloraz $Q_y(x) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Mamy

$$(Q_y(x))' = \left(\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right)' = \frac{f'(x)(x-y)-(f(x)-f(y))}{(x-y)^2} = \frac{f(y)-(f'(x)(y-x)+f(x))}{(x-y)^2}.$$

Na mocy poprzedniego twierdzenia licznik jest dodatni, więc funkcja $Q_y$ rośnie. No w zasadzie koniec, ale: jaka jest wartość funkcji $Q_y$ dla $x = y$?

Na razie większość uczniów wie, że przez 0 nie wolno dzielić (niektórzy wiedzą, że zera nie wolno dzielić np. przez 2). Formaliści potrafią analizować funkcje postaci $\frac{x}{x}$ i twierdzić (może nawet słusznie z formalnego punktu widzenia), że ta funkcja w punkcie 0 nie jest zdefiniowana. Jasne jest, że należy uzupełnić definicję przyjmując $Q_y(y) = \lim\limits_{x \to y} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(y)$. Otrzymamy funkcję ciągłą również w punkcie $y$. $\square$.

W szkole, skoro już nauczyciel mówi o pochodnych, o wykresach funkcji i temu podobnych rzeczach, powinno się też znaleźć trochę czasu na wypukłość. Można ją zdefiniować mówiąc, że wykres wypukłej funkcji różniczkowalnej leży „nad styczną” w dowolnym punkcie. Można też zdefiniować funkcję wypukłą jako funkcję spełniającą warunek:

*dla każdej liczby $t \in (0,1)$ i dla dowolnych punktów $x, y$ z dziedziny funkcji $f$ zachodzi nierówność:*

$$f(tx+(1-t)y) \le f(x)+(1-t)f(y)\,.$$

Ta nierówność mówi, że wykres funkcji wypukłej leży „nad” odcinkiem łączącym dwa dowolne punkty tego wykresu. Z tego, co udowodniliśmy wcześniej wynika nieomal natychmiast, że funkcja różniczkowalna jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest niemalejąca. Pokazaliśmy jak to zrobić bez użycia twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej. Tematu tego jednak tu rozwijać nie będę.

Chciałbym zwrócić jeszcze uwagę Państwa na funkcję $\sqrt[3]{\frac{7x^2-3}{9x^2-4}}$ zdefiniowaną dla $x \neq \pm\frac{2}{3}$. Otóż $f'(x) = \frac{2x}{3}(7x^2-3)^{-2/3}(9x^2-4)^{-4/3}$, więc jest pewien problem z istnieniem pochodnej w punktach $\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$. Można skorzystać z definicji pochodnej w punkcie, by przekonać się o tym, że

$$f'\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right) = \lim_{x\to\sqrt{\frac{3}{7}}} \frac{1}{x-\sqrt{\frac{3}{7}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{7x^2-3}{9x^2-4}} = \lim_{x\to\sqrt{\frac{3}{7}}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-\sqrt{\frac{3}{7}})^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{7(x+\sqrt{\frac{3}{7}})}{9x^2-4}} = -\infty\,.$$

Wynika stąd, że styczną do wykresu funkcji w punkcie $\left(\sqrt{3/7},0\right)$ jest prosta (pionowa) o równaniu $x=\sqrt{3/7}$. Próbując narysować ten wykres szybko przekonujemy się o tym, że między punktami $\sqrt{\frac{3}{7}} \approx 0{,}655$ i $\frac{2}{3} \approx 0{,}666\ldots$. Ale to oznacza, że odległość między punktem przegięcia i każdą z liczb $\sqrt{\frac{3}{7}}$, $\frac{2}{3}$ jest mniejsza od $\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{3}{7}} \approx 0{,}011$. Nie kończę tego przykładu, bo chodzi mi tu tylko o to, że czasem niekoniecznie „od razu” widać z wykresu różne rzeczy bez obliczeń, a tego rodzaju teorie są szerzone w wielu podręcznikach i w szkołach, co ośmielam się uważać za szkodliwe. W matematyce jednak dokładne uzasadnienia są ważne.

Z pochodną wiąże się oczywiście przybliżanie funkcji za pomocą funkcji liniowej. Kilka przykładów. $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, zatem
$\sqrt{50} = \sqrt{49+1} \approx 7+\frac{1}{2\cdot 7}\cdot 1 \approx 7{,}0714$; kalkulator: $\sqrt{50} \approx 7{,}0711$,
$\sqrt{1000} = \sqrt{1024-24} \approx 32-\frac{24}{2\cdot 32} = 32-\frac{3}{8} = 31{,}625$; kalkulator: $\sqrt{1000} \approx 31{,}6228$.
$(\sqrt[3]{x}\,)' = (x^{1/3})' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, zatem
$\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{8+2} \approx 2+\frac{1}{3\cdot 4}\cdot 2 = 2+\frac{1}{6} \approx 2{,}1667$; kalkulator: $\sqrt[3]{10} \approx 2{,}1544$,
$\sqrt[3]{1024} = \sqrt[3]{1000+24} \approx 10+\frac{24}{3\cdot 10^2} = 10{,}08$; kalkulator: $\sqrt[3]{1024} \approx 31{,}0794$.

Oczywiście przykłady dobrałem tak, aby było widać, że to działa, ale to związane jest z tym, że pochodne wybranych funkcji zmieniają się bardzo wolno w okolicach interesujących mnie punktów.

## Kilka zadań

*Te zadania były używane na zajęciach dla studentów chemii i ekonomii Uniwersytetu Warszawskiego, więc były przeznaczone dla osób o praktycznie zerowym przygotowaniu matematycznym — wedle dzisiejszej terminologii: ze zdana maturą podstawową. Moim zdaniem nadają się do szkół. Starałem się wyszukać zadania, w których należy optymalizować proste funkcje, ale nie wielomiany kwadratowe, bo do nich pochodne nie są potrzebne, choć w wielu podręcznikach używane, co prowadzi do ich całkiem bezmyślnego stosowania.*

**1.** Znaleźć maksimum objętości brył powstałych w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o obwodzie 1 wokół przeciwprostokątnej.

**2.** Znaleźć maksimum objętości stożka wpisanego w kulę o promieniu 1.

**3.** Znaleźć maksimum obwodu trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 1.

**4.** Znaleźć maksimum długości statku, który może wpłynąć z kanału o szerokości $a > 0$ do prostopadłego doń kanału, którego szerokość jest równa $b > 0$.

**5.** Znaleźć maksimum pola trójkąta o obwodzie 3 – można skorzystać z wzoru Herona.

**6.** Znaleźć największy wyraz ciągu $(a_n)$, jeśli $a_n = n^5 2^{-n}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

**7.** Znaleźć największy wyraz ciągu $(a_n)$, jeśli $a_n = n^5 3^{-n}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

**8.** Ciężarówka porusza się po autostradzie ze stałą prędkością $v$ km/h. Minimalna prędkość dla ciężarówek na autostradzie wynosi 50 km/h, maksymalna 100 km/h, litr benzyny kosztuje 2 zł, kierowca otrzymuje 10 zł za godzinę swej pracy. Ciężarówka zużywa $11 + \frac{v^2}{400}$ litrów paliwa w ciągu godziny jazdy z prędkością $v$. Przy jakiej prędkości koszt przejazdu ustalonego odcinka trasy jest najmniejszy? (bardzo stare ceny!)

**9.** Statek pływa z portu A do portu B. Koszt ruchu statku składa się z dwu części: niezależnej od prędkości i równej 25600 zł dziennie oraz zależnej od prędkości i równej (liczbowo) podwojonemu sześcianowi prędkości dziennie. Przy jakiej prędkości koszt przepłynięcia trasy jest najmniejszy?

**10.** Zbadano, że w pewnej fabryce robotnik rozpoczynający pracę o godzinie 8:00 wykonuje w ciągu $x$ godzin $-x^3 + 6x^2 + 15x$ radioodbiorników. Po 15–minutowej przerwie wykonuje w ciągu $x$ godzin $-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 23x$ radioodbiorników. O której powinna rozpocząć się 15–minutowa przerwa, aby do 12:15 wykonał najwięcej radioodbiorników, a której – by wykonał ich najmniej?

**11.** Ile pierwiastków rzeczywistych ma równanie $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$.

**12.** Ile pierwiastków rzeczywistych ma równanie $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$.

**13.** Ile pierwiastków rzeczywistych ma równanie $x^5 - 5x = a$ w zależności od $a \in \mathbb{R}$.

**14.** Z helikoptera znajdującego się na wysokości 60 m nad powierzchnia morza wysłano promień światła do nurka znajdującego się na głębokości 40 m pod powierzchnią wody. Odległość **w poziomie** między helikopterem i nurkiem jest równa 110 m. Przyjmujemy, że prędkość światła w powietrzu to 300 000 km/s a — w wodzie to 225 000 km/s. Wiedząc, że światło „wybiera” taką drogę, na przebycie której potrzeba najmniej czasu, znaleźć punkt, w którym promień wszedł do wody, tzn. znaleźć odległość tego punktu od punktu na powierzchni wody, nad którym znajduje się helikopter.
*Może warto coś narysować?*
**Wygodną jednostką w tym zadaniu jest 1 dam = 10 m (dekametr).** Pomnożyć zawsze się zdąży, a pomyśleć?
W dekametrach szukana odległość to nieduża całkowita.

**15.** Z każdego z czterech rogów tekturowego prostokąta o bokach 35 cm i 11 cm wycięto kwadrat o boku $x$. Zagięto tekturę w wyniku czego powstało pudełko (bez pokrywki) w kształcie prostopadłościanu. Wysokość pudełka równa jest $x$. Dla jakiego $x$ pojemność otrzymanego pudełka jest największa?

**16.** Na paraboli $y = x^2$ znaleźć punkt, który leży najbliżej punktu $\left(4, \frac{7}{2}\right)$.

**17.** Na paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$ znaleźć punkt, którego odległość od punktu $(24, 15)$ jest najmniejsza.

**18.** Znaleźć na paraboli $y = x^2$, który leży najbliżej punktu $(-3, 10)$.

**19.** Na paraboli $y = x^2$ znaleźć punkt $P$ leżący najbliżej punktu $Q = (0, 2)$. Znaleźć kąt między prostą $QP$ a styczną do wykresu funkcji $x^2$ w punkcie $P$.

**20.** Znaleźć na paraboli $y = \frac{x^2}{4}$ punkt $P$ leżący się najbliżej punktu $A = (2, 5)$. Znaleźć kąt między odcinkiem $AP$ i prostą styczną do paraboli w punkcie $P$.

**21.** Niech $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f$ na przedziale domkniętym $[-2, 6]$.

**22.** Znaleźć najmniejszą wartość funkcji $x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)^2}$ na półprostej otwartej $(2, +\infty)$ lub wykazać, że ta funkcja na półprostej $(2, \infty)$ najmniejszej wartości nie ma.

**23.** Znaleźć na paraboli $y = \frac{x^2}{4}$ trzy punkty: $P$ znajdujący się najbliżej punktu $A = (0, 1)$, $Q$ znajdujący się najbliżej punktu $B = (0, 2)$ i $R$ znajdujący się najbliżej punktu $C = (0, 3)$.

**24.** Niech $f(x) = -x^3 + 12x - 6$. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f$ na przedziale domkniętym $[-5, 3]$.

**25.** Znaleźć najmniejszą wartość funkcji $x^2 + \frac{125x^2}{(x-1)^2}$ na półprostej otwartej $(1, +\infty)$ lub wykazać, że ta funkcja na półprostej $(1, \infty)$ najmniejszej wartości nie ma.

**26.** Niech $b > 1$ będzie liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć liczbę $k > 0$ tak, by prosta $L$ o równaniu $y = kx + b$ miała dokładnie jeden punkt wspólny z elipsą o równaniu $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Znaleźć punkt wspólny prostej $L$ z prostą o równaniu $y = -1$.
Niech $A = (0, -1)$, $B = (0, b)$ dla $b > 1$ i $C$ oznacza punkt znaleziony w poprzedniej części zadania. Znaleźć taką liczbę $b > 1$, żeby pole trójkąta $ABC$ było najmniejsze.

**27.** Znaleźć stożek o najmniejszej objętości spośród wszystkich stożków opisanych na kuli o promieniu 1.

Stożek jest opisany na kuli wtedy i tylko wtedy, gdy jego powierzchnia boczna i podstawa są styczne do kuli.

**28.** Słup ma wysokość 12 m. W odległości 8 m od słupa stoi dziecko wzrostu 100 cm. Znaleźć wysokość $x$, na której należy umieścić lampę, by odległość $d(x)$ lampy od końca cienia dziecka była najmniejsza.

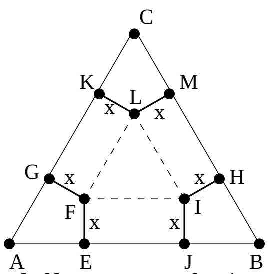
**29.** Który z trójkątów równoramiennych wpisanych w okrąg o promieniu 1 ma największe pole? Odpowiedź szczegółowo uzasadnić.

**30.** Na wykresie funkcji $y = \frac{1}{9}x^3 - 3x$ znaleźć punkt najbliższy punktowi $(-15, -5)$.

**31.** Niech $A$ oznacza zbiór złożony z tych wszystkich punktów $(x, y)$, dla których $xy = 8$ i $x > 0$. W zbiorze $A$ znaleźć punkt leżący najbliżej punktu $\left(13, \frac{19}{2}\right)$.

**32.** Znaleźć takie dwie liczby nieujemne, których suma jest równa 165, że iloczyn sześcianu jednej z nich i pierwiastka trzeciego stopnia z kwadratu drugiej jest największy.

**33.** Z tekturowego trójkąta równobocznego $ABC$ o boku $a$ odcięto trzy deltoidy $AEFG$, $BHIJ$, $CKLM$ przy czym: punkty $E, J$ leżą na boku $AB$, punkty $H, M$ — na boku $BC$, punkty $KG$ na boku $CA$, zaś punkty $F, I, L$ — wewnątrz trójkąta $ABC$; odcinki $FE$ oraz $IJ$ są prostopadłe do boku $AB$, odcinki $IH$ oraz $LM$ — do boku $BC$, odcinki $LK$ oraz $FG$ — do boku $CA$; długość każdego odcinków z tych sześciu odcinków jest równa $x$. Następnie zagięto tekturę uzyskując pudełko o wysokości $x$, otwarte z góry, którego denkiem jest trójkąt $FIL$.




Dla jakiego $x$ pojemność powstałego pudełka jest największa?

Na koniec opowiem o rozwiązaniu pewnego zadania z bieżącej OM, którego ocenę przyszło mi dokładnie przedyskutować z kolegami. Ten fragment do pochodnych nic nie ma, ale załączam go, bo uważam, że warto go przedstawić większej liczbie osób.

**Przykład 14.** Zadanie z drugiego stopnia bieżącej OM.
*Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wyznaczyć najmniejszą wartość wielomianu*

$$w_n(x) = x^{2n} + 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} + \ldots + (2n-1)x^2 + 2nx.$$

Przedstawię rozwiązanie młodej kobiety, która została finalistką 65 OM. Pani Alicja napisała, że dla $n \geq 2$ zachodzi równość

$$w_n(x) = x^2 w_{n_1} + (2n-1)x^2 + 2nx\,,$$

co sprawdzający zaakceptowali wyrażając jednak pogląd, że należałoby to uzasadnić jakoś. Następnie p. Alicja dowodzi, że $w_n(-1) = -n$. Mogłaby zrobić to indukcyjnie, ale wylicza jakieś sumy — pamiętajmy, że czas miała ograniczony. Dalej chce dowieść, że dla każdego $x$ i każdego $n$ zachodzi nierówność $w_n(x) \geq -n$, co jest równoważne temu, że $w_n(x) + n \geq 0$. Sprawdza dla $n = 1$: $w_1(x) + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$. Potem zakłada, że dla pewnego $k$ nierówność $w_k(x) + k \geq 0$ zachodzi dla każdego $x$ i pisze

$$w_{k+1}(x) + (k+1) = x^2(w_k(x) + 2k + 1) + 2(k+1)x + k + 1\,.$$

Kontynuuje

$$\begin{aligned}\Delta = 4(k+1)^2 - 4(w_k(x) + 2k+1)(k+1) = 4(k+1)(k+1-w_k(x) - 2k - 1) = \\ = 4(k+1)(-k - w_k(x)) = -4(k+1)(w_k(x) + k) \leq 0\end{aligned}$$

— ostatnia nierówność wynika z założenia indukcyjnego. Ponieważ wyróżnik jest niedodatni, więc wielomian $w_{k+1}$ ma stały znak.

No i co Państwo sądzą o tym tekście?

Chcę podkreślić, że to, co zdecydowana większość nauczycieli również akademickich miałaby ochotę oznajmić: to nie wielomian kwadratowy, więc jaki znów wyróżnik, nie jest najlepszym komentarzem. Nie jest bo w rozumowaniu:

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\,,$$

nie jest ważne to, czy $a, b, c$ są stałymi, czy też funkcjami zmiennej $x$. Musimy jedynie wiedzieć, że $a \neq 0$. Rozwiązanie p. Alicji w końcu zostało ocenione na 5 punktów, przypomnę, że w OM możliwymi ocenami są jedynie 0, 2, 5 lub 6. Punkt straciła za to, że nie napisała $a \neq 0$, nawet słowem o tej kwestii nie wspomniała.

Inny młody człowiek napisał, że

$$\begin{aligned}&w_n(x) = (x^{2n} + x^{2n-1} + \ldots + x^2 + x) + (x^{2n-1} + \ldots + x^2 + x) + (x^{2n-2} + x^{2n-3} + \ldots + x) + \\ &+ \ldots + (x^2 + x) + x = \tfrac{x^{2n+1}-x}{x-1} + \tfrac{x^{2n}-x}{x-1} + \tfrac{x^{2n-1}-x}{x-1} + \ldots + \tfrac{x^3-x}{x-1} + \tfrac{x^2-x}{x-1} = \tfrac{1}{x-1}\left(\tfrac{x^{2n+2}-x^2}{x-1} - 2nx\right) = \\ &= \tfrac{1}{(x-1)^2}\big(x^{2n+2} - x^2 - 2nx(x-1)\big) = \tfrac{1}{(x-1)^2}\big(x^{2n+2} - (2n+1)x^2 + 2nx\big),\end{aligned}$$

a potem, niestety już w odwołaniu, twierdził, że był o krok od rozwiązania, bo wystarczyło dowieść, że zachodzi nierówność $0 \leq w_n(x) + n = \frac{1}{(x-1)^2}\big(x^{2n+2} - (2n+1)x^2 + 2nx\big) + n = \frac{1}{(x-1)^2}\big(x^{2n+2} - (2n+1)x^2 + 2nx + n(x-1)^2\big) = \frac{1}{(x-1)^2}\big(x^{2n+2} - (n+1)x^2 + n\big)$, więc wystarczy wykazać, że $x^{2n+2} - (n+1)x^2 + n \geq 0$. Ostatnia nierówność wynika natychmiast, z tego, że $(x^{2n+2} - (n+1)x^2 + n)' = 2(n+1)x(x^{2n} - 1) = 2(n+1)x(x^n - 1)(x^n + 1)$, więc ta pochodna jest ujemna w zbiorze $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$, a w zbiorze $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ jest dodatnia. Stąd wynika, że najmniejszą wartością funkcji (parzystej!) $x^{2n+2} - (n+1)x^2 + n$ jest jej wartość w punkcie $-1$ lub w punkcie 1, czyli liczba 0.

**Przykład 15.** *Dowieść, że jeżeli liczba rzeczywista* $x_1$ *spełnia równanie* $x^3 + 2px + q = 0$ *($p, q$ — dane liczby rzeczywiste)*,to $x_1 q \leq p^2$ — to zadanie z XVII OM (1965/66).
Jedno z rozwiązań autorstwa S. Straszewicza wygląda tak: skoro liczba $x_1$ spełnia równanie $x_1 x^2 + px + q = 0$, to $0 \leq \Delta = 4p^2 - 4x_1 q$, a to oznacza, że $x_1 q \leq p^2$. Gdy $x_1 = 0$ nierówność jest też prawdziwa, bo kwadraty liczb rzeczywistych są nieujemne.

Jestem pewien, że osoby, które rozwiązywały wtedy to zadanie nagrodono masymalną oceną.