Pochodne

Postaram się uzupełnić ten tekst w najbliższych dniach.

Do szkół „wracają” pochodne. Kiedyś były w programach, wcześniej ich nie było. Potem znów nie było i teraz będą. Przynajmniej przez jakiś czas. Skąd wzięły się owe obiekty. Otóż pewien Francuz, Pierre de Fermat (1601 — 1665), zajmował się m. in. znajdowaniem największych i najmniejszych wartości funkcji, np. wielomianów trzeciego, czwartego stopnia. Zajmował się też stycznymi do krzywych, które leżały po jednej stronie stycznej. Wtedy szukanie punktu styczności to też szukanie minimum, np. różnicy współrzędnych punktu na wykresie funkcji i na prostej. René Descartes (Kartezjusz, 1596 — 1650) patrzył na styczną jak na granicę (wtedy jeszcze granicami nie zajmowano się) prostych przechodzących przez dwa punkty krzywej, jeden był ustalony, a drugi do niego zbliżał się. Uściślenia pojawiły się długo po ich śmierci. Pokażę na przykładach, jak znajdowano wtedy wartości największe i najmniejsze.

Powiedzmy, że interesuje nas najmniejsza i największa wartość wielomianu x^3-9x^2+15x na przedziałach $[0,6]$ i $[-2,6]$. Niech $f(x):=x^3-9x^2+15x$. Załóżmy, że $f(p)$ jest najmniejszą wartością funkcji f w punkcie p. Wtedy dla wszystkich x z interesującego nas przedziału zachodzi nierówność

$$f(x)=x^3-9x^2+15x\geq p^3-9p^2+15p=f(p), \text{ czyli}$$
$$0\leq x^3-9x^2+15x-(p^3-9p^2+15p)=(x-p)\big(x^2+xp+p^2-9(x+p)+15\big).$$

Oznacza to, że dla każdego $x<p$ zachodzi nierówność $x^2+xp+p^2-9(x+p)+15\leq 0$, a dla $x>p$ — nierówność $x^2+xp+p^2-9(x+p)+15\geq 0$. Stąd płynie wniosek:

$$0=p^2+p\cdot p+p^2-9(p+p)+15=3p^2-18p+15=3(p^2-6p+5)=3(p-1)(p-5),$$

zatem najmniejszą wartość funkcja f może przyjmować jedynie w punktach 1, 5 lub w końcu przedziału. Rozumowanie opierające się na rozpatrywaniu znaku długiego wyrażenia po obu stronach punktu p nie może przecież dotyczyć końca przedziału.

W wypadku przedziału $[0,6]$ w grę wchodzą więc liczby 0, 7, -25 i -18. Najmniejsza z nich to $f(5)=-25$, zatem to jest najmniejsza wartość funkcji x^3-9x^2+15x na przedziale $[0,6]$. Uwaga: **jeśli** ten wielomian na tym przedziale ma najmniejszą wartość. Podane rozumowanie — dobre w XVII wielu — dziś budzi drobny niedosyt. Trzeba je uzupełnić. Można powołać się na twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów przez funkcję ciągłą na domkniętym przedziale. To nie jest jedyna metoda. Pokażemy inną, bo w szkole twierdzenia o osiąganiu kresów nie ma: w podstawie programowej ciąg liter *ciągł* występuje tylko raz, co oznacza, że ciągłością funkcji uczniowie nie muszą się zajmować. Na razie możemy sformułować hipotezę

$$x^3-9x^2+15x\geq -(-25) \text{ i udowodnić ją:}$$
$$0\leq x^3-9x^2+15x\geq -(-25)=(x-5)(x^2-4x-5)=(x-5)(x+1)(x-5)=(x+1)(x-5)^2,$$

co kończy dowód, bo na przedziale $[0,6]$ zachodzą nierówności $x+1>0$ i $(x-5)^2\geq 0$. Znaleźliśmy najmniejszą wartość funkcji na przedziale $[0,1]$.

To samo rozumowanie, z niewielką zmianą, przekonuje nas o tym, że największą wartością funkcji x^3-9x^2+15x na przedziale $[0,6]$ jest liczba 7. Zmiana przedziału na $[-2,6]$ nie zmienia rozumowania poza końcówką. Teraz najmniejsza wartością staję się $f(-2)=-74$, a największą pozostaje $f(1)=7$. W rzeczywistości Fermat postępował nieco inaczej: pisał $p+h$ zamiast x, otrzymywał więc równość $f(x)=f(p+h)=p^3-9p^2+15p+(3p^2-18p+15)h+(3p-9)h^2+h^3$, a potem stwierdzał, że h^2 i h^3 są w zasadzie tak małe, że można je zlekceważyć, co prowadziło do wniosku, że $3p^2-18p+15=0$, bo inaczej po różnych stronach punktu p czyli dla h o różnych znakach, liczby $f(p+h)-f(p)$ miałyby różne znaki. Było więc to rozumowanie lokalne. W zasadzie prowadziło do wzoru Taylora (1685 — 1731), ale oczywiście dopiero po kilkudziesięciu latach.

Rozwiążemy następny bardzo znany problem. Dane są punkty P i Q na płaszczyźnie leżące po tej samej stronie prostej ℓ w odległościach $a > 0$ i $b > 0$ od niej. Odległość ich rzutów prostopadłych na prostą ℓ jest równa $c > 0$. Znaleźć na tej prostej punkt X, dla którego suma odległości $XP + XQ$ jest najmniejsza.

Jasne jest, że X leży na odcinku, którego końcami są rzuty prostopadłe P' i Q' punktów P i Q na prostą ℓ. Załóżmy, że punkt X leży w odległości $x \geq 0$ od punktu P', więc w odległości $c - x \geq 0$ od punktu Q'. Wtedy $XP + XQ = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$. Zmieniamy x o wielkość $h \in [-x, c - x]$. Suma odległości zmieniła się więc o wielkość

$$\sqrt{a^2 + (x+h)^2} + \sqrt{b^2 + (c - x - h)^2} - \sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{b^2 + (c - x)^2} =$$
$$= \frac{2xh + h^2}{\sqrt{a^2+(x+h)^2}+\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{-2(c-x)h + h^2}{\sqrt{b^2+(c-x-h)^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}} =$$
$$= h\left(\frac{2x+h}{\sqrt{a^2+(x+h)^2}+\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{-2(c-x)+h}{\sqrt{b^2+(c-x-h)^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}}\right).$$

Aby w punkcie $x \in (0, c)$ funkcja $\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$ miała najmniejszą wartość wyrażenie w nawiasie musi zerować się dla $h = 0$, czyli musi być spełniona równość

$$\frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{-2(c-x)}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = 0 \quad \text{czyli} \quad \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}.$$

Okazało się, że kosinusy kątów $\sphericalangle P'XP$ i $\sphericalangle Q'XQ$ są równe, więc te kąty (ostre!) też są równe.

To zadanie ma sens fizyczny. Wedle zasady Fermata światło porusza się z punktu P do punktu Q po takiej trajektorii, po której ruch trwa najkrócej. Jeśli prosta ℓ pełni rolę lustra, to promień światła odbija się od tego lustra w taki sposób, że *kąt padania jest równy kątowi odbicia*. Dotyczy to nie tylko zwierciadła płaskiego, ale też zwierciadła, którego kształt opisać można jako wykres funkcji różniczkowalnej. Kąt to kąt między styczną do wykresu, a raczej — tak wolą fizycy — między normalną (czyli prostopadłą do stycznej), a promieniem światła.

Podobne zadanie brzmi tak:
znaleźć punkt, w którym promień światła wypuszczony z punktu P leżącego po jednej stronie prostej ℓ przechodzi przez punkt Q znajdujący się po przeciwnej stronie prostej ℓ wiedząc, że:

odległość punktu P od prostej ℓ równa jest a, a odległość punktu Q od niej — b oraz że

prędkość światła w półpłaszczyźnie zawierającej punkt P jest równa v, a w półpłaszczyźnie zawierającej punkt Q — w,

światło porusza się z punktu P do punktu Q po takiej trajektorii, po której ruch trwa najkrócej.

Jasne jest, że promień przetnie prostą ℓ pomiędzy punktami P' i Q' — rzutami prostopadłymi punktów P i Q na prostą ℓ. Oznaczmy odległość punktów P' i Q' przez c. Załóżmy, że światło przechodzi przez punkt X znajdujący się w odległości $x \in [0, c]$ od punktu P', więc w odległości $c - x$ od punktu Q'. Czas zużyty na przemieszczenie się z punktu P do punktu Q jest równy $T(x) = \frac{1}{v}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{w}\sqrt{b^2 + (c - x)^2}$. Rachując jak poprzednio otrzymujemy równość

$$T(x + h) - T(x) = h\left(\frac{2x+h}{v\left(\sqrt{a^2+(x+h)^2}+\sqrt{a^2+x^2}\right)} + \frac{-2(c-x)+h}{w\left(\sqrt{b^2+(c-x-h)^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}\right)}\right).$$

Wynika stąd, że aby wartość funkcji T w punkcie x była najmniejsza, musi zachodzić równość

$$\frac{x}{v\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{w\sqrt{b^2+(c-x)^2}}.$$

Jeśli $\alpha = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle P'XP$ i $\beta = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle Q'XQ$, to warunek można zapisać w postaci: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v}{w}$. Wzór jest znany prawo załamania światła (Snelliusa czyli Snella, 1580 — 1626), podane wyprowadzenie pochodzi od Fermata. Znane było jednak wcześniej w nieco innym sformułowaniu Persowi zwącemu się Ibn Sahl (940 — 1000), czasem Europa trochę spóźnia się.

Z pierwszego zadania geometrycznego wynika w szczególności, że jeśli wśród trójkątów wpisanych w dany trójkąt, istnieje trójkąt o najmniejszym obwodzie, to jego boki tworzą równe kąty z bokami danego trójkąta. Jeśli tym minimalnym trójkątem wpisanym w trójkąt ABC jest trójkąt KLM, przy czym punkt K leży na boku BC, L — na boku CA, M — na boku AB, to $\sphericalangle AML = \sphericalangle BMK$, $\sphericalangle BKM = \sphericalangle CKL$ i $\sphericalangle CLK = \sphericalangle ALM$. Wynika stąd równości $\sphericalangle AML = \sphericalangle BMK = \sphericalangle BCA$, $\sphericalangle BKM = \sphericalangle CK \sphericalangle CAB$ i $\sphericalangle CLK = \sphericalangle ALM = \sphericalangle ABC$. Z nich z kolei można wywnioskować, że $\Delta MBK \sim \Delta CBA$, $\Delta KCL \sim \Delta ACB$ oraz $\Delta LAM \sim \Delta BAC$. Teraz bez trudu można wyznaczyć odcinki AM, BK i CL w zależności od boków wyjściowego trójkąta. Przy okazji trójkąt minimalny KLM istnieje, gdy trójkąt ABC jest ostrokątny. Widać więc, że zadanie można rozwiązać w miarę krótko nawet, gdy nie jest się matematykiem klasy Fejéra, Schwarza lub Fermata.

Podobnie jest z poszukiwaniem punktu X w danym trójkącie ABC, którego suma odległości $AX + BX + CX$ od wierzchołków danego trójkąta jest najmniejsza (to zadanie pochodzące od Fermata rozwiązał Torricelli, 1608 — 1647). Załóżmy, że X jest właśnie takim punktem i że leży wewnątrz trójkąta ABC. Oznaczmy jego odległości od wierzchołków A, B, C przez k, ℓ, m. Niech $\alpha = \pi - \sphericalangle AXC$, $\beta = \pi - \sphericalangle BXC$. Zastąpmy punkt X punktem X' leżącym na prostej CX w odległości $m + x$ od wierzchołka C, jeśli $x > 0$, odsuwamy się od C, a jeśli $x < 0$ zbliżamy się do C. W obu przypadkach, przy założeniu, że $|x|$ jest na tyle małą liczbą dodatnią, że punkt X' jest wewnątrz trójkąta ABC, możemy napisać: $AX' = \sqrt{k^2 + x^2 - 2kx\cos\alpha}$, $BX' = \sqrt{\ell^2 + x^2 - 2\ell x\cos\alpha}$ i $CX' = m + x$. Oznacza to, że $AX' + BX' + CX' - (AX + BX + CX) = \frac{x^2 - 2kx\cos\alpha}{\sqrt{k^2+x^2-2kx\cos\alpha}+k} + \frac{x^2-2\ell x\cos\beta}{\sqrt{\ell^2+x^2-2\ell x\cos\beta}+\ell} + x =$
$= x\left(\frac{x-2k\cos\alpha}{\sqrt{k^2+x^2-2kx\cos\alpha}+k} + \frac{x-2\ell\cos\beta}{\sqrt{\ell^2+x^2-2\ell x\cos\beta}+\ell} + 1\right).$
Aby wyrażenie to przyjmowało swą najmniejszą dla $x = 0$, zawartość nawiasu dla $x = 0$ musi zerować się, czyli $0 = \frac{-2k\cos\alpha}{\sqrt{k^2}+k} + \frac{-2\ell\cos\beta}{\sqrt{\ell^2+}+\ell} + 1 = -\cos\alpha - \cos\beta + 1$, czyli $\cos\alpha + \cos\beta = 1$. Jeśli $\gamma = \pi - \sphericalangle BXA$, to analogiczna analiza polegająca na przesuwaniu punktu X wzdłuż prostej AX, a potem — wzdłuż prostej BX prowadzi do wniosku, że również $\cos\gamma + \cos\alpha = 1$ oraz $\cos\gamma + \cos\beta = 1$. Rozwiązując łatwy układ 3 równań liniowych otrzymujemy równości $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{2}$. Oznacza to, że $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. Wykazaliśmy, że jedynym punktem wewnętrznym trójkąta, w który suma odległości od wierzchołków trójkąta ABC może mieć najmniejszą wartość jest punkt, z którego widać każdy z trzech boków trójkąta pod kątem $\frac{2\pi}{3}$ (czyli 120°). Jest to punkt przecięcia trzech okręgów, więc można spodziewać się, że jest tylko jeden taki punkt, ale tego nie wykazaliśmy: ani istnienia (łatwe) ani jedyności (też nietrudne). Co gorsza to jedyny kandydat, ale dlaczego minimum ma w ogóle być osiągane? Ten sam problem dotyczy poprzednich dwóch rozumowań.

Problem istnienia minimum można rozwiązać albo w oparciu o wspomniane już tw. Weierstrassa, ale w szczególnie w ostatnich przykładach może to wymagać jego „wielowymiarowej wersji”. Można też postępować nieco inaczej, ale wymaga to jeszcze jednego twierdzenia.

Twierdzenie 1. Jeśli funkcja $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału P, ma pochodną w każdym jego punkcie wewnętrznym i jest niemalejąca, to pochodna jest nieujemna w każdym punkcie $\mathrm{int}(P)$.

Dowód. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, a ponieważ funkcja f jest niemalejąca, więc $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ dla dowolnych $x, x+h \in P$, jeśli tylko $h \neq 0$. Granica funkcji nieujemnmej jest nieujemna (jeśli tylko istnieje). $\square$

Ważne jest odwrócenie tego twierdzenia, ale jego dowód zwykle jest poza programem szkolnym, bo wymaga użycia twierdzenia o wartości średniej. To ostatnie twierdzenie zazwyczaj wnioskowane jest z twierdzenia Rolle'a, a to z kolei z twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów.

Sformułujmy najpierw twierdzenie, które pozwala stwierdzać monotoniczność funkcji w oparciu o własności jej pochodnej.

Twierdzenie 2. Jeśli funkcja $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału P i ma pochodną w każdym jego punkcie wewnętrznym, to

jeśli $f'(x) \geq 0$ dla każdego $x \in \mathrm{int}(P)$, to funkcja f jest niemalejąca na przedziale P;

jeśli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathrm{int}(P)$, to funkcja f jest ściśle rosnąca;

jeśli $f'(x) \geq 0$ dla każdego $x \in \mathrm{int}(P)$ i dla dowolnych, różnych punktów $x_1, x_2 \in P$ istnieje taki punkt x leżący między x_1 i x_2, że $f'(x) > 0$, to funkcja f jest ściśle rosnąca.

Widać, że trzecia część twierdzenia zawiera drugą. Tym nie mniej zaczniemy od uzasadnienia drugiej części tezy. Niech $x \in \mathrm{int}(P)$. Ponieważ $f'(x) > 0$, więc istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $0 < |h| < \delta$, to $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$, zatem jeśli $0 < h < \delta$, to $f(x+h) - f(x) > 0$, czyli $f(x+h) > f(x)$.

Niech $c_x \in P \cap (x, \infty)$ będzie największą taką liczbą, że jeśli $t \in (x, c_x] \cap P$, to $f(t) > f(x)$. Jeśli c_x jest prawym końcem przedziału P, to dla każdego $t \in P$ z nierówności $t > x$ wynika, że $f(t) > x$. Załóżmy, że $c_x \in \mathrm{int}(P)$. Wtedy $f'(c_x) > 0$, więc istnieje taka liczba η, że jeśli $0 < |h| < \eta$, to $0 < \frac{1}{h}(f(c_x + h) - f(c_x))$. Stąd wynika, że jeśli np. $s \in (x, c_x)$, $c_x - s < \eta$ oraz $c_x < t < c_x + \eta$, to $f(x) < f(s) < f(c_x) < f(t)$, a to oznacza, że liczbę c_x należy powiększyć przynajmniej o η, wbrew założeniu, że jej powiększyć się już nie da. Oznacza to, że c_x jest prawym końcem przedziału P, więc dla każdego $t \in (x, \infty) \cap P$ zachodzi nierówność $f(x) < f(t)$.

Jeśli prawy koniec b przedziału P jest elementem przedziału P, to ponieważ f jest funkcją ciągłą w punkcie b, więc $f(b) = \lim_{t\to b^+}$ i z nierówności $x < s < t$, wynika, że $f(x) < f(s) < f(t)$, zatem $f(b) = \lim_{t\to b} f(t) \geq f(s) > f(x)$. Wobec tego dla każdego $t \in P$ z nierówności $t > x$ wynika, że $f(t) > f(x)$. Podobnie uzasadniamy, że jeśli a jest lewy końcem P i $a \in P$, to $f(x) < f(x)$ dla każdego $x \in P \cap (a, \infty)$, co kończy dowód drugiej części tezy. [1]

Pierwszą część tezy wywnioskować można z drugiej, już udowodnionej. Jeśli $\varepsilon > 0$, to $(f(x) + \varepsilon x)' = f'(x) + \varepsilon \geq \varepsilon > 0$. Wobec tego funkcja $x \mapsto f(x) + \varepsilon x$ jest ściśle rosnąca, zatem jeżeli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) + \varepsilon x_1 < f(x_2) + \varepsilon x_2$, więc $-\varepsilon(x_2 - x_1) < f(x_2) - f(x_1)$, a ponieważ ta nierówność zachodzi dla **każdej** dodatniej liczby ε, więc $f(x_2) - f(x_1) \geq \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \big(-\varepsilon(x_2 - x_1)\big) = 0$.

Została trzecia część tezy. Tu już jest łatwo. Z już udowodnionej części twierdzenia wynika, że jeśli $x_1 < x_2$ dla $x_1, x_2 \in P$, to $f(x_1) \leq f(x_2)$. Z założenia wynika, że istnieje taki punkt $x \in (x_1, x_2)$, że $f'(x) > 0$. Wobec tego istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $0 < |t - x| < \delta$, to $\frac{f(t)-f(x)}{t-x} > 0$. Wybierając punkty t_1, t_2 tak, że $x_1 < t_1 < x < t_2 < x_2$ otrzymujemy

$$f(x_1) \leq f(t_1) < f(x) < f(t_2) \leq f(x_2),$$

a stąd nierówność $f(x_1) < f(x_2)$ wynika natychmiast. □

Uwaga 3. Jeśli funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału P i różniczkowalna w każdym jego punkcie wewnętrznym, to jest ściśle rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy gdy jej pochodna jest nieujemna a między każdymi dwoma punktami przedziału P znajduje się punkt, w którym ta pochodna jest dodatnia — to stwierdzenie wynika natychmiast z udowodnionych twierdzeń.

[1] Użyliśmy tu pewnika ciągłości w zakamuflowany sposób. Mianowicie zdefiniowaliśmy c_x jako największą liczbę .... Jej istnienie wynika właśnie z pewnika ciągłości, ale trudno spodziewać się pytania o jej istnienie od zwykłego ucznia.

Przykład 4. Niech
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0, \\ 2x + x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$
Z definicji pochodnej i z nierówności $|x^2 \sin \frac{1}{x^3}| \leq x^2$ wynika od razu, że $f'(0) = 0$. Mamy też $f'(x) = 2 + 2x \sin \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x} \cos \frac{1}{x^3}$ — na podstawie znanych wzorów (w większości nieobecnych w szkole). Niech $x_n = \sqrt{\frac{1}{2n\pi}}$. Wtedy $f'(x_n) = 2 - 2\sqrt{2n} < 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Funkcja f ma więc dodatnią pochodną w punkcie 0, ale nie jest rosnąca w żadnym otoczeniu tego punktu: w każdym przedziale znajduje się punkt, w którym jej pochodna jest ujemna. Przy okazji: pochodna tej funkcji nie jest ciągła w punkcie 0. □

Przykład 5. Niech $a \geq b > 0$ będą liczbami rzeczywistymi. P niech oznacza prostokąt, którego jeden bok ma długość a, a drugi — b. Z prostokąta P wycinamy cztery kwadraty o boku $x \in \left(0, \frac{b}{2}\right)$ zawierające cztery wierzchołki P tak, że pole P zmniejsza się o $4x^2$. Następnie zaginamy „wystające" części powstałego dwunastokąta (niewypukłego) tak, by powstało pudełko o wymiarach $a-2x,\ b-2x,\ x$. Dla jakiego x pojemność otrzymanego pudełka będzie największa?

Rozwiązanie. Niech $V(x) = x(a-2x)(b-2x)$ będzie pojemnością pudełka. V jest funkcją ciągłą, a nawet różniczkowalną w każdym punkcie swej dziedziny. Z punktu widzenia pojemności pudełka dziedziną funkcji V jest przedział $\left(0, \frac{b}{2}\right)$, ale można tę funkcję rozpatrywać na przedziale domkniętym $\left[0, \frac{b}{2}\right]$. Na przedziale $\left[0, \frac{b}{2}\right]$ funkcja V, jako ciągła, przyjmuje wartość najmniejszą oraz wartość największą (później okaże się, że można obejść aię bez twierdzenia Weierstrassa).

Ponieważ $V(0) = V\left(\frac{b}{2}\right) = 0$ i $V(x) > 0$ dla $x \in \left(0, \frac{b}{2}\right)$, więc najmniejsza wartość przyjmowana jest w końcach przedziału $\left[0, \frac{b}{2}\right]$, zaś największa — w pewnym punkcie wewnętrznym x_0 tego przedziału.

Ponieważ funkcja V jest różniczkowalna w punkcie x_0, więc $V'(x_0) = 0$. Wystarczy zatem znaleźć punkty w przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$, w których pochodna funkcji V przyjmuje wartość 0 i stwierdzić, w którym z nich V ma największą wartość. Takie punkty są co najwyżej dwa, bo V jest wielomianem trzeciego stopnia, więc V' jest wielomianem kwadratowym.

$V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$. Wiemy, że ten wielomian ma co najmniej jeden pierwiastek w przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ (nie ma potrzeby sprawdzać, że jego wyróżnik jest dodatni, bo to wynika z istnienia x_0!).[2] Możemy teraz zastosować to samo rozumowanie do badania funkcji V na przedziale $\left[\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right]$. Wewnątrz tego przedziału funkcja V przyjmuje wartości ujemne, zeruje się w jego końcach. Wobec tego swą najmniejszą wartość na $\left[\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right]$ funkcja V przyjmuje wewnątrz przedziału i wobec tego jej pochodna V' przyjmuje wartość 0 w co najmniej jednym punkcie tego przedziału.

Z tego rozumowania wynika, że w każdym z przedziałów $\left(0, \frac{b}{2}\right)$, $\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$ pochodna V' funkcji V ma co najmniej jeden pierwiastek, a ponieważ V' ma dokładnie dwa pierwiastki, więc w każdym z wymienionych przedziałów ma dokładnie jeden pierwiastek. Tak się dzieje, gdy $a > b$. Jeżeli $a = b$, to sytuacja jest nieco inna: $V'\left(\frac{b}{2}\right) = 0$, co sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem (ogólnie: jeśli liczba x_1 jest podwójnym pierwiastkiem funkcji f, tzn. $f(x) = (x - x_1)^2 g(x)$ dla pewnej funkcji g różniczkowalnej w x_1, to $f(x_1) = 0 = f'(x_1)$) i wobec tego również w tym przypadku w przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ funkcja V' może mieć co najwyżej jeden pierwiastek, więc ma dokładnie jeden. Udowodniliśmy w ten sposób, że w przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ funkcja V' ma dokładnie jeden pierwiastek x_0, którym jest mniejszy z dwóch pierwiastków tej funkcji, a liczba

[2] Drugi pierwiastek wielomianu V' też jest dodatni, bo iloczyn pierwiastków tego wielomianu jest równy $\frac{ab}{12}$, jest więc dodatni, zatem oba pierwiastki maja ten sam znak, ale z tego korzystać nie będziemy.

$V(x_0)$ jest największą wartością funkcji V przyjmowaną na przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$. Oczywiście $x_0 = \frac{4(a+b)-\sqrt{[4(a+b)]^2-4\cdot 12ab}}{2\cdot 12} = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$.

Uwaga 6. Nie zajmowaliśmy się znakiem pochodnej V', bo nie było potrzeby ustalać na jakich przedziałach funkcja V rośnie, a na jakich maleje. Oczywiście można było postąpić inaczej, w szkole wręcz należało stwierdzić, że na przedziale $(0, x_0)$ pochodna V' funkcji V jest dodatnia, więc V na tym przedziale rośnie, a na przedziale $\left(x_0, \frac{b}{2}\right)$ pochodna V' jest ujemna, więc na tym przedziale funkcja V maleje. Z przedstawionego rozumowania to też wynika, bo na przedziale $(0, x_0)$ pochodna V' nie przyjmuje wartości 0 , ma zatem ten sam znak we wszystkich punktach tego przedziału, zatem funkcja V jest na tym przedziale ściśle monotoniczna, nie może być malejąca, bo $V(x_0) > 0 = V(0)$, więc jest ściśle rosnąca, więc jej niezerująca się pochodna jest dodatnia. $\square$

Przykład 7. Znaleźć maksimum objętości brył powstałych w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o obwodzie 1 wokół jego przeciwprostokątnej.

Rozwiązanie: Niech a, b, c oznaczają boki trójkąta, przy czym c to przeciwprostokątna. Bryła powstała w wyniku obrotu trójkąta wokół boku c to dwa stożki złączone podstawami. Promień tej wspólnej podstawy to wysokość trójkąta prostopadła do przeciwprostokątnej. Wysokość h_c, prostopadła do boku c, jest równa $\frac{ab}{c}$, bo pole trójkąta jest równe $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$. Suma wysokości tych stożków jest równa c. Wobec tego suma ich objętości jest równa $V = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{ab}{c}\right)^2 \cdot c = \frac{\pi(ab)^2}{3c}$.

Wiemy, że $a^2 + b^2 = c^2$ (tw. Pitagorasa) i $a + b + c = 1$ (dany obwód trójkąta). Wobec tego

$$2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = (1 - c)^2 - c^2 = 1 - 2c.$$

Zachodzą więc wzory $V = V(c) = \frac{\pi(1-2c)^2}{12c} = \frac{\pi}{12}\left(\frac{1}{c} - 4 + 4c\right)$ i $V'(c) = \frac{\pi}{12}\left(\frac{-1}{c^2} + 4\right)$. Wobec tego $V'(c) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c = \pm\frac{1}{2}$, zatem kandydatami na punkt, w którym funkcja V przyjmuje swą największą wartość, są $\frac{1}{2}$ oraz $-\frac{1}{2}$. Ponieważ c jest długością boku trójkąta, więc $c > 0 > -\frac{1}{2}$. Liczba $\frac{1}{2}$ też nie wchodzi w grę, bo wtedy byłaby spełniona równość $a + b = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = c$, wbrew temu, że: *suma dwóch boków trójkąta jest większa od trzeciego.* Oznacza to, że funkcja V jest ściśle monotoniczna na każdym przedziale zawartym w swej dziedzinie. Kresy są wartościami funkcji w końcach przedziału, jeśli końce są w dziedzinie. Musimy więc znaleźć dziedzinę funkcji V.

Liczby a, b, c mają być bokami trójkąta prostokątnego o obwodzie 1. Muszą więc być dodatnimi rozwiązaniami układu równań: $a^2 + b^2 = c^2$, $a + b = 1 - c$. Warunek ten jest też dostateczny: jeśli $a, b, c > 0$ i $a^2 + b^2 = c^2$, to $(a + b)^2 > a^2 + b^2 = c^2$, zatem $a + b > c$ i oczywiście $a + c > c > b$ oraz $b + c > c > a$. Oznacza to, że z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt, oczywiście prostokątny. Ten układ równań równoważny jest następującemu:

$$a + b = 1 - c, \qquad ab = \frac{(1-c)^2-c^2}{2} = \frac{1}{2} - c.$$

Liczby a i b są więc pierwiastkami równania kwadratowego $t^2 - (1 - c)t + \frac{1}{2} - c = 0$. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by to równanie to miało dodatnie pierwiastki dla dodatniej wartości parametru c, jest $0 < c < \frac{1}{2}$ oraz

$$0 \le \Delta = (1 - c)^2 - 4(\tfrac{1}{2} - c) = -1 + 2c + c^2 = (c + 1)^2 - 2$$

czyli $\sqrt{2}-1 \le c < \frac{1}{2}$. Ponieważ $V\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, więc największą wartością funkcji V jest $V\left(\sqrt{2} - 1\right)$ — oczywiście maksymalna na przedziale $\left[\sqrt{2} - 1, \frac{1}{2}\right)$. Łatwo zauważyć, że dla $c = \sqrt{2} - 1$ otrzymujemy trójkąt równoramienny (bo $\Delta = 0$, więc pierwiastki równania kwadratowego $x^2 - (1 - c)x + \frac{1}{2} - c = 0$, czyli liczby a i b są równe).

Komentarz: Ten przykład powinien przekonać uczniów o konieczności zwracania uwagi na dziedzinę funkcji. W tym zadaniu to nie tylko rytuał. Omawiałem to zadanie wielokrotnie na ćwiczeniach, jeszcze się nie zdarzyło, by studenci chcieli, aby objętość V potraktować jako np.

funkcję zmiennej a. Korzystalibyśmy wtedy z wzoru $V = V(a) = \frac{\pi a^2(1-2a)^2}{6(1-a)(1-2a+2a^2)}$. Maksimum osiągane byłoby w punkcie wewnętrznym dziedziny funkcji V, czyli przedziału $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, mianowicie w punkcie $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, zatem w punkcie zerowania się pochodnej funkcji V. Byłoby mniej kłopotu z dziedziną funkcji, za to więcej z obliczeniami. Często studenci nie potrafili stwierdzić, że ponieważ funkcja ma niezerową pochodną na przedziale, to jest na nim monotoniczna. Wydawało im się, że w obliczeniach był błąd, bo skoro w jakimś punkcie ma być maksimum, to pochodna musi się tam zerować zapominając, że to twierdzenie mówi o punktach **wewnętrznych** dziedziny. $\square$

Przykład 8. Znaleźć najkrótszy z odcinków, które dzielą pole trójkąta ABC o bokach $a = BC = 4$, $b = CA = 5$, $c = AB = 6$ na połowy.

Naturalnym pomysłem jest założenie, że np. na bokach CA i AB wybrano punkty Q i P odpowiednio. Oznaczmy $y = AQ$, $x = AP$. Pole trójkąta PQA jest połową pola trójkąta BCA wtedy i tylko wtedy, gdy $yx = \frac{1}{2}bc$. Kwadrat długości odcinka PQ jest równy (tw. kosinusów)

$$PQ^2 = x^2 + y^2 - 2xy\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = x^2 + y^2 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2} = (x+y)^2 - ab - \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$$

Chodzi więc o zminimalizowanie sumy $x + y$ przy założeniu, że $xy = \frac{bc}{2}$ i oczywiście $x, y > 0$. Mamy $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$. Wtedy oczywiście $x = y = \sqrt{\frac{bc}{2}}$. Oczywiście jest to możliwe wyłącznie wtedy gdy $\sqrt{\frac{bc}{2}} \leq b$ i $\sqrt{\frac{bc}{2}} \leq c$, czyli gdy $c \leq 2b$ i $b \leq 2c$, co akurat w wypadku rozpatrywanego trójkąta ma miejsce. Mamy wtedy $PQ^2 = \left(\sqrt{\frac{bc}{2}} + \sqrt{\frac{bc}{2}}\right)^2 - bc - \frac{b^2+c^2-a^2}{2} = bc - \frac{b^2+c^2-a^2}{2} = \frac{1}{2}\left(a^2 - (b-c)^2\right)$. Jasne jest, że wybierając punkty na innych parach boków otrzymamy liczby $\frac{1}{2}\left(b^2 - (c-a)^2\right)$ oraz $\frac{1}{2}\left(c^2 - (a-b)^2\right)$. Podstawiwszy odpowiednie liczby otrzymamy $\frac{15}{2}$, $\frac{21}{2}$ i $\frac{35}{2}$. Wobec to długość najkrótszezego odcinka to $\sqrt{\frac{15}{2}}$.

Uwaga 9. Zadanie można zmieniać manipulując długościami boków trójkąta np. w taki sposób, by nie było możliwe wybranie odcinków równej długości na ramionach kąta. Trochę to skomplikuje analizę. $\square$

Można udowodnić w szkole:

Twierdzenie 10. Jeśli pierwsza pochodna funkcji jest ściśle rosnąca, to wykres funkcji leży nad styczną do siebie w każdym punkcie.

Można, bo dowód wygląda tak $\Big(f(x) - \big(f'(p)(x-p) + f(p)\big)\Big)' = f'(x) - f'(p)$, więc ta pochodna jest dodatnia dla $x > p$, zaś dla $x < p$ — jest ujemna. Wobec tego najmniejszą wartością funkcji $x \mapsto f(x) - \big(f'(p)(x-p) + f(p)\big)$ jest $f(p) - \big(f'(p)(p-p) + f(p)\big) = 0$. $\square$

Z tego twierdzenia wynika łatwo

Twierdzenie 11. Jeśli pierwsza pochodna funkcji f jest ściśle rosnąca, to dla każdego y z dziedziny funkcji f, przekształcenie $x \mapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ jest rosnące.

Dla dowodu należy zróżniczkować iloraz $Q_y(x) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Mamy

$$(Q_y(x))' = \left(\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right)' = \frac{f'(x)(x-y)-(f(x)-f(y))}{(x-y)^2} = \frac{f(y)-(f'(x)(y-x)+f(x))}{(x-y)^2}.$$

Na mocy poprzedniego twierdzenia licznik jest dodatni, więc funkcja Q_y rośnie. No w zasadzie koniec, ale: jaka jest wartość funkcji Q_y dla $x = y$?
No każdy uczeń wie, że przez 0 nie wolno dzielić. Niektórzy nawet potrafią analizować funkcje postaci $\frac{x}{x}$ i twierdzić (może nawet słusznie z formalnego punktu widzenia), że ta funkcja w punkcie 0 nie jest zdefiniowana. Jasne jest, że należy uzupełnić definicję przyjmując $Q_y(y) = \lim\limits_{x\to y} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(y)$. Otrzymamy funkcję ciągłą również w punkcie y. $\square$.

W szkole, skoro już nauczyciel mówi o pochodnych, o wykresach funkcji i temu podobnych rzeczach, powinno się też znaleźć trochę czasu na wypukłość. Można ją zdefiniować mówiąc, że wykres wypukłej funkcji różniczkowalnej leży „nad styczną" w dowolnym punkcie. Można też zdefiniować funkcję wypukłą jako funkcję spełniającą warunek:

dla każdej liczby $t \in (0,1)$ i dla dowolnych punktów x, y z dziedziny funkcji f zachodzi nierówność:

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x) + (1-t)f(y)\,.$$

Ta nierówność mówi, że wykres funkcji wypukłej leży „nad" odcinkiem łączącym dwa dowolne punkty tego wykresu. Z tego, co udowodniliśmy wcześniej wynika nieomal natychmiast, że funkcja różniczkowalna jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest niemalejąca. Pokazaliśmy jak to zrobić bez użycia twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej. Tematu tego jednak tu rozwijać nie będę.

Chciałbym zwrócić jeszcze uwagę Państwa na funkcję $\sqrt[3]{\frac{7x^2-3}{9x^2-4}}$ zdefiniowaną dla $x \neq \pm\frac{2}{3}$. Otóż $f'(x) = \frac{2x}{3}(7x^2-3)^{-2/3}(9x^2-4)^{-4/3}$, więc jest pewien problem z istnieniem pochodnej w punktach $\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$. Można skorzystać z definicji pochodnej w punkcie, by przekonać się o tym, że $f'\big(\pm\sqrt{3/7}\big) = \mp\infty$. Wynika stąd, że styczną do wykresu funkcji w punkcie $\big(\sqrt{3/7}, 0\big)$ jest prosta (pionowa) o równaniu $x = \sqrt{3/7}$. Próbując narysować ten wykres szybko przekonujemy się o tym, że między punktami $\sqrt{\frac{3}{7}} \approx 0{,}655$ i $\frac{2}{3} \approx 0{,}666\ldots$. Ale to oznacza, że odległość między punktem przegięcia i każdą z liczb $\sqrt{\frac{3}{7}}$, $\frac{2}{3}$ jest mniejsza od $\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{3}{7}} \approx 0{,}011$. Nie kończę tego przykładu, bo chodzi mi tu tylko o to, że czasem niekoniecznie „od razu" wiadać z wykresu różne rzeczy bez obliczeń, a tego rodzaju teorie są szerzone w szkołach, co ośmielam się uważać za szkodzenie. W matematyce jednak dokładne uzasadnienia są ważne.

Na koniec opowiem o rozwiązaniu pewnego zadania z bieżącej OM, którego ocenę przyszło mi dokładnie przedyskutować z kolegami.

Przykład 12. Zadanie z drugiego stopnia bieżącej OM.
Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wyznaczyć najmniejszą wartość wielomianu

$$w_n(x) = x^{2n} + 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} + \ldots + (2n-1)x^2 + 2nx.$$

Przedstawię rozwiązanie młodej kobiety, która została finalistką 65 OM. Pani Alicja napisała, że dla $n \geq 2$ zachodzi równość

$$w_n(x) = x^2 w_{n_1} + (2n-1)x^2 + 2nx\,,$$

co sprawdzający zaakceptowali wyrażając jednak pogląd, że należałoby to uzasadnić jakoś. Następnie p. Alicja dowodzi, że $w_n(-1) = -n$. Mogłaby zrobić to indukcyjnie, ale wylicza jakieś sumy — pamiętajmy, że czas miała ograniczony. Dalej chce dowieść, że dla każdego x i każdego n zachodzi nierówność $w_n(x) \geq -n$, co jest równoważne temu, że $w_n(x) + n \geq 0$. Sprawdza dla $n = 1$: $w_1(x) + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$. Potem zakłada, że dla pewnego k nierówność $w_k(x) + k \geq 0$ zachodzi dla każdego x i pisze

$$w_{k+1}(x) + (k+1) = x^2(w_k(x) + 2k + 1) + 2(k+1)x + k + 1\,.$$

Kontynuuje

$$\begin{aligned}\Delta = 4(k+1)^2 - 4(w_k(x) + 2k + 1)(k+1) &= 4(k+1)(k+1 - w_k(x) - 2k - 1) = \\ &= 4(k+1)(-k - w_k(x)) = -4(k+1)(w_k(x) + k) \leq 0\end{aligned}$$

— ostatnia nierówność wynika z założenia indukcyjnego. Ponieważ wyróżnik jest niedodatni, więc wielomian w_{k+1} ma stały znak.

No i co Państwo sądzą o tym tekście?

Chcę podkreślić, że to, co zdecydowana większość nauczycieli również akademickich miałaby ochotę oznajmić: to nie wielomian kwadratowy, więc jaki znów wyróżnik, nie jest najlepszym komentarzem. Nie jest bo w rozumowaniu:

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\,,$$

nie jest ważne to, czy a, b, c są stałymi, czy też funkcjami zmiennej x. Musimy jedynie wiedzieć, że $a \neq 0$. Rozwiązanie p. Alicji w końcu zostało ocenione na 5 punktów, przypomnę, że w OM możliwymi ocenami są jedynie 0, 2, 5 lub 6. Punkt straciła za to, ze nie napisała $a \neq 0$, nawet słowem o tej kwestii nie wspomniała.

Inny młody człowiek napisał, że
$w_n(x) = (x^{2n} + x^{2n-1} + \ldots + x^2 + x) + (x^{2n-1} + \ldots + x^2 + x) + (x^{2n-2} + x^{2n-3} + \ldots + x) + {} + \ldots + (x^2 + x) + x = \frac{x^{2n+1}-x}{x-1} + \frac{x^{2n}-x}{x-1} + \frac{x^{2n-1}-x}{x-1} + \ldots + \frac{x^3-x}{x-1} + \frac{x^2-x}{x-1} = \frac{1}{x-1}\Big(\frac{x^{2n+2}-x^2}{x-1} - 2nx\Big) = {} = \frac{1}{(x-1)^2}\big(x^{2n+2} - x^2 - 2nx(x-1)\big) = \frac{1}{(x-1)^2}\big(x^{2n+2} - (2n+1)x^2 + 2nx\big)$,
a potem, niestety już w odwołaniu, twierdził, że był o krok od rozwiązania, bo wystarczyło dowieść, że zachodzi nierówność $0 \leq w_n(x) + n = \frac{1}{(x-1)^2}\big(x^{2n+2} - (2n+1)x^2 + 2nx\big) + n = \frac{1}{(x-1)^2}\big(x^{2n+2} - (2n+1)x^2 + 2nx + n(x-1)^2\big) = \frac{1}{(x-1)^2}\big(x^{2n+2} - (n+1)x^2 + n\big)$, więc wystarczy wykazać, że $x^{2n+2} - (n+1)x^2 + n \geq 0$. Ostatnia nierówność wynika natychmiast, z tego, że $(x^{2n+2} - (n+1)x^2 + n)' = 2(n+1)x(x^{2n} - 1) = 2(n+1)x(x^n - 1)(x^n + 1)$, więc ta pochodna jest ujemna w zbiorze $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$, a w zbiorze $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ jest dodatnia. Stąd wynika, że najmniejszą wartością funkcji (parzystej!) $x^{2n+2} - (n+1)x^2 + n$ jest jej wartość w punkcie -1 lub w punkcie 1, czyli liczba 0.

Przykład 13. *Dowieść, że jeżeli liczba rzeczywista x_1 spełnia równanie $x^3 + 2px + q = 0$ (p, q — dane liczby rzeczywiste),*to $x_1 q \leq p^2$ — to zadanie z XVII OM (1965/66).
Jedno z rozwiązań autorstwa S. Straszewicza wygląda tak: skoro liczba x_1 spełnia równanie $x_1 x^2 + px + q = 0$, to $0 \leq \Delta = 4p^2 - 4x_1 q$, a to oznacza, że $x_1 q \leq p^2$. Gdy $x_1 = 0$ nierówność jest też prawdziwa, bo kwadraty liczb rzeczywistych są nieujemne.

Jestem pewien, że osoby, które rozwiązywały wtedy to zadanie nagrodono masymalną oceną.