Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Lublin, 21 września 2013: przekształcenia geometryczne i niezmienniki

Michał Krych

21 września 1899 r. we Lwowie urodził się Juliusz Schauder. Zamordowali go we wrześniu lub na początku października 1943 r. Niemcy. Podobnie jak w wypadku wielu innych osób żydowskiego pochodzenia nie jest znana dokładna data śmierci. Doktoryzował się we Lwowie, promotorem był Hugo Steinhaus. Uogólnił twierdzenie Brouwera o punkcie stałym na przypadek nieskończenie wymiarowy, a później wspólnie z J.Lerayem rozwinął teorię indeksu zwanego dziś indeksem Leray–Schaudera. Teoria pozwala m. in.na dowodzenie istnienia rozwiązań równań różniczkowych. Uzyskał też wiele innych wyników. Jest jednym z najbardziej znanych na świecie matematyków polskich, choć np. ja nie wiedziałem przez czas pewien, że on pochodzi ze Lwowa, a twierdzenie o punkcie stałym znałem, oczywiście wraz z dowodem. Wydaje się, że jego nazwisko pozostanie w matematyce na trwałe.

Poniżej jest pewna liczba zadań. Każde z nich jest opatrzone szkicem rzowiązania lub pełnym rozwiązaniem. Niektóre rozwiązania zostały skopiowane z broszur napisanych przez profesora dr Stefana Straszewicza — faktycznego twórcę Olimpiady Matematycznej. To dotyczy pierwszych dwudziestu Olimpiad. Kilka rozwiązań zadań z następnych Olimpiad, XXI XXII pochodzi z tekstów autorstwa prof. dr Jerzego Browkina. W nielicznych przypadkach zredagowałem rozwiązanie nieco inaczej, z różnych przyczyn.

Tekst zostanie jeszcze poszerzony o rysunki, których na razie nie miałem kiedy wykonać. Będę go jeszcze sprawdzać, co może doprowadzić do usunięcia błędów, które w zasadzie zawsze się pojawiają wbrew mej woli. **Osobom, które zauważyłyby jakieś błędy i poinformowały mnie o tym będę bardzo wdzięczny.**

Cześć zadań jest za trudna dla gimnazjalistów nawet tych, którzy aktywnie uczestniczą w dodatkowych zajęciach, np. kółkach. Jednak uznałem, że warto je zamieścić. Na ogół dlatego, że mi się podobają. Poza tym prowadzący kółko może czasem z jednego zadania zrobić dwa lub trzy łatwiejsze, a czasem zadanie za trudne do samodzielnego rozwiązania w domu można rozwiązać zespołowo podsuwając młodzieży pewne pomysły albo krytykując ich podejście, co też może naprowadzić uczniów na właściwy trop.

1. Skonstruować trójkąt o danych wysokościach h_A, h_B i h_C.

Szkic rozwiązania. Konstruujemy trójkąt podobny do poszukiwanego — mamy dane stosunki boków, bo boki są odwrotnie proporcjonalne do wysokości.

2. Skonstruować trójkąt o danych środkowych m_A, m_B i m_C.

Szkic rozwiązania. W trójkącie którego bokami są odcinki o długościach $\frac{2}{3}m_A$, $\frac{2}{3}m_B$ i $\frac{2}{3}m_C$ środkowymi są połówki boków poszukiwanego trójkąta. Jeśli S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, C_1 jest takim punktem , że środkiem odcinka CC_1 jest S, to $AS = \frac{2}{3}M_A$, $SC_1 = \frac{2}{3}M_C$ i $AC_1 = \frac{2}{3}M_B$.
Uwaga: Konstrukcja trójkąta o danych dwusiecznych jest niewykonalna.

3. Dany jest kąt wypukły $\sphericalangle A_1BC_1$ i punkt X leżący wewnątrz kąta $\sphericalangle A_1BC_1$. Skonstruować trójkąt ABC, którego wierzchołek A leży na półprostej BA_1, wierzchołek C — na półprostej BC_1, którego środkiem ciężkości jest punkt X.
Szkic rozwiązania. Znajdujemy najpierw środek M_b boku AC korzystając z tego, że X dzieli środkową w stosunku $2:1$. Przez punkt M_b prowadzimy równoległe do ramion kąta. W przecięciu z ramionami są środki M_a i M_c szukanych boków.

4. Wewnątrz kąta wypukłego $\sphericalangle M_1ON_1$ znajdują się punkty A i B. Skonstruować równoległobok $AMBN$, którego przekątną jest odcinek AB a wierzchołki M, N leżą na półprostych OM_1 i ON_1 odpowiednio.
Rozwiązanie. Środek odcinka AB jest też środkiem odcinka MN. Znajdujemy punkty M i N jak w poprzednim zadaniu.

5. Dany jest kąt wypukły $\sphericalangle A_1BC_1$ i punkt X leżący wewnątrz kąta $\sphericalangle A_1BC_1$. Skonstruować trójkąt ABC, którego wierzchołek A leży na półprostej BA_1, wierzchołek C — na półprostej BC_1, którego ortocentrum (punkt wspólny wysokości) jest punkt X.
Rozwiązanie. Przez punkt X proadzimy proste prostopadłe do boków trójkąta. W przecięciu otrzymujemy wierzchołki szukanego trójkąta.

6. Pole trójkąta T jest równe S. Wyznaczyć pole trójkąta, którego bokami są środkowe trójkąta T.
Rozwiązanie. Niech M_a oznacza środek boku BC trójkąta ABC, a M — jego środek ciężkości. Niech A' oznacza punkt symetryczny do M względem punktu M_a. Czworokąt $CMBA'$ jest równoległobokiem, bo jego przekątne połowią się wzajemnie. Pole trójkąta MBA' jest równe polu trójkąta CMB, a to pole jest równe jednej trzeciej pola trójkąta ABC. Bokami trójkąta MBA' są odcinki równe dwóm trzecim odpowiednich środkowych trójkąta ABC, więc jego pole to $\frac{4}{9}$ pola trójkąta utworzonego ze środkowych. Wobec tego pole trójkąta utworzonego ze środkowych to $\frac{3}{4}$ pola trójkąta wyjściowego.

7. W dany kwadrat wpisać taki kwadrat, którego jeden bok lub jego przedłużenie przechodzi przez dany punkt K. (II OM).

Szkic rozwiązania. Wierzchołki kwadratu $MNPQ$ wpisanego w dany kwadrat $ABCD$ leżą na różnych jego bokach: M na boku AB, N na boku BC itd. Nietrudno zauważyć, że odcięte trójkąciki MBN, NCP, PDQ i QAM są podobne (bo kąty w kwadracie $MNPQ$ są proste) i mają równe przeciwprostokątne, zatem są przystające. Stąd wynika, że środki obu kwadratów pokrywają się. Obracając kwadraty wokół wspólnego środka o $90°$ otrzymujemy wyjściowe kwadraty. Punkt K przy obrocie przechodzi na punkt L. Jeśli punkt K leży na prostej MN, która po obrocie trafia na prostą NP, to L leży na NP. Kąt LNK jest prosty, więc punkt N leży na okręgu o średnicy LK, więc jest punktem wspólnym prostej BC i okręgu o średnicy KL.

Szczegóły pozostawiamy Czytelnikom. W tym uzasadnienie tego, że konstrukcja jest wykonalna, gdy punkt K nie leży wewnątrz okręgu wpisanego w kwadrat, którego wierzchołkami są środki boków czworokąta $ABCD$.

8. Zbudować czworokąt $ABCD$ mając dane długości boków AB i CD oraz kąty czworokąta. (III OM)

Szkic rozwiązania. Jeśli czworokąt jest równoległobokiem, to istnieje nieskończenie czworokątów spełniających nałożone warunki lub żaden (np. jeśli kąty wyznaczają równoległobok, ale $AB \neq CD$. Konstrukcja równoległoboku jest bardzo prosta: wybieramy odcinek AB na jednej prostej równoległej, z jego końców prowadzimy pod odpowiednimi kątami dwie proste, które przecinają równoległą do danej (dowolnie wybraną) wyznaczając na niej odcinek CD. Jeśli $AB \neq CD$, to proste AC i BD mają punkt wspólny E. Możemy skonstruować trójkąty ABE i DEC (znamy jeden bok i wszystkie kąty), a potem — mając długości odcinków AE, BE, CE i DE umieścić oba trójkaty na jednym rysunku.

9. Dowieść, że jeśli w czworokącie wypukłym odcinek łączący środki przeciwległych boków jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych boków, to czworokąt jest trapezem.

Rozwiązanie. Niech kolejnymi wierzchołkami czworokąta będą punkty A, B, C i D. Niech P oznacza środek boku BC, a Q — boku DA oraz niech $PQ = \frac{1}{2}(AB + CD)$. Niech E oznacza taki punkt płaszczyzny, że $EA \parallel DC$ i $EA = DC$, przy czym czworokąt $EADC$ jest równoległobokiem, a odcinek AD jego przekątną. Wtedy środkiem odcinka EC jest punkt Q, przekątne równoległoboku połowią jedna drugą. Wobec tego odcinek QP łączący środki boków CE i CB trójkąta EBC jest równoległy do podstawy EB i zachodzi wzór $PQ = \frac{1}{2}EB$ z drugiej strony $EB \leq EA + AB$ przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy punkt A leży ma odcinku EB, a wtedy $AB \parallel DC$.

10. Dowieść że jeśli suma obu odcinków łączących środki przeciwległych boków czworokąta wypukłego jest połową jego obwodu, to czworokąt jest równoległobokiem.

Rozwiązanie. Każdy z tych odcinków jest mniejszy lu równy od połowy sumy boków, z krórymi nie ma punktów wspólnych — wynika to z rozumowania z rozwiązania poprzedniego zadania. Wobec tego ich suma jest zawsze mniejsza lub równa od połowy obwodu. Z równości wynika, że każdy z nich jest połową sumy boków z nim rozłącznych, a to oznacza, że czworokąt jest trapezem na dwa sposoby, zatem jest równoległobokiem.

11. Czy prawdziwe są twierdzenia:

a) jeżeli cztery wierzchołki prostokąta leżą na czterech bokach rombu, to boki prostokąta są równoległe do przekątnych rombu;

b) jeżeli cztery wierzchołki kwadratu leżą na czterech bokach rombu, który nie jest kwadratem, to boki kwadratu są równoległe do przekątnych rombu.(III OM)

Rozwiązanie. a) Pierwsze twierdzenie nie jest prawdziwe; aby to wykazać, wystarczy dać kontrprzykład, czyli pokazać figurę zaprzeczającą twierdzeniu.

Ze środka O rombu $ABCD$ zatoczmy okrąg o promieniu większym niż odległość środka rombu od jego boku, a mniejszym niż połowa krótszej przekątnej rombu.

Cała figura jest symetryczna względem każdej z prostych AC i BD, a także względem punktu O. Nakreślony okrąg przecina każdy bok rombu w dwóch punktach. Niech M będzie jednym z punktów przecięcia boku AB z okręgiem, a N niech będzie tym punktem przecięcia boku BC z okręgiem, który nie jest symetryczny do punktu M względem prostej BD. Niech następnie P i Q będą punktami symetrycznymi do punktów M i N względem punktu O, odcinki MP i NQ są zatem średnicami okręgu; wobec symetrii figury względem punktu O punkty P i Q są punktami przecięcia boków CD i DA z okręgiem.

Czworokąt $MNPQ$ jest prostokątem, gdyż każdy jego kąt jest kątem wpisanym w nakreślony okrąg i opartym na jego średnicy (np. kąt MNP opiera się na średnicy MP). Bok MN tego prostokąta nie jest prostopadły do prostej BD, gdyż prosta MN nie przechodzi przez punkt symetryczny do punktu M względem prostej BD; tym samym bok MN nie jest równoległy do przekątnej AC. Bok MN nie jest też równoległy do przekątnej BD, gdyż łączy punkty M i N leżące po przeciwnych stronach prostej BD. Wierzchołki M, N, P, Q prostokąta $MNPQ$ leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA rombu, ale boki tego prostokąta nie są równoległe do przekątnych rombu. Prostokąt $MNPQ$ stanowi zatem kontrprzykład obalający twierdzenie a).

b) Wykażemy, że drugie twierdzenie jest prawdziwe.

Niech $MNPQ$ będzie kwadratem wpisanym w romb $ABCD$, przy czym wierzchołki M, N, P, Q kwadratu leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA rombu.

Udowodnimy najpierw, że środek O kwadratu jest jednocześnie środkiem rombu. Obróćmy całą figurę dookoła punktu O o 180°. Wierzchołek M kwadratu znajdzie się po obrocie w przeciwległym wierzchołku P, prosta AB da po obrocie prostą przechodzącą przez punkt P równolegle do prostej AB, tzn. pokryje się z prostą CD. Ponieważ takie samo rozumowanie stosuje się do każdego boku rombu, więc wynika stąd, że po obrocie romb nałoży się sam na siebie, a to oznacza, że środek obrotu O jest środkiem symetrii rombu.

Obróćmy teraz całą figurę dookoła punktu O o 90° tak, aby półprosta OA pokryła półprostą OB. Po obrocie kwadrat $MNPQ$ przejdzie w kwadrat $NPQM$, tzn. nałoży się sam na siebie; romb $ABCD$ przejdzie w romb $A'B'C'D'$, nie pokrywający się z rombem $ABCD$, gdyż według założenia romb ten nie jest kwadratem. Jeśli np. $OA > OB$ to $OA' > OB$, a $OD' = OD < OA$; zatem odcinki $D'A'$ i AB przecinają się. Punktem przecięcia tych odcinków jest wierzchołek M kwadratu, gdyż na ten punkt upadnie po obrocie punkt Q odcinka AD. Analogicznie odcinki BC i $A'B'$ przecinają się w wierzchołku N kwadratu.

Figura złożona z obu rombów jest symetryczna względem prostej BD; w tej symetrii punktowi M odpowiada punkt N. Prosta MN jest więc prostopadła do osi symetrii BD, czyli jest równoległa do prostej AC, czego należało dowieść.

Uwaga. Gdybyśmy odrzucili założenie, że romb $ABCD$ nie jest kwadratem, twierdzenie nie byłoby prawdziwe, w kwadrat bowiem można wpisać nieskończenie wiele kwadratów, z których tylko jeden ma boki równoległe do przekątnych kwadratu danego.

Z dowiedzionego twierdzenia b) wynika, że w romb nie będący kwadratem można wpisać tylko jeden kwadrat, w ten sposób, żeby na każdym boku rombu leżał któryś wierzchołek kwadratu. Można dowieść twierdzenia mocniejszego: istnieje tylko jeden kwadrat, którego wierzchołki leżą na obwodzie rombu $ABCD$ nie będącego kwadratem. Wystarczy w tym celu dowieść, że nie istnieje kwadrat, którego dwa wierzchołki leżą na tym samym boku rombu, a pozostałe wierzchołki na innych bokach rombu. Pozostawiamy to jako ćwiczenie.

12. (*dosyć popularne*) Po różnych stronach kanału o równoległych, prostoliniowych brzegach znajdują się domy A i B. W którym miejscu należy zbudować most przez kanał, prostopadły do brzegów kanału, by droga z z domu A do domu B była najkrótsza. Do mostu można iść na przełaj przez łąkę i od mostu do domu też.

Szkic rozwiązania. Długość drogi przez kanał jest niezależna od umiejscowienia mostu, zatem zadanie sprowadza się do tego, że trzeba znaleźć najkrótszą drogę z punktu A_1 otrzymanego przez przesunięcie punktu A w kierunku kanału (prostopadle do kanału) o szerokość kanału. Należy więc połączyć punkty A_1 i B odcinkiem prostej. Punkt przecięcia tej prostej z brzegiem po stronie B wyznacza miejsce, w którym powinien pojawić się most.

13. Na płaszczyźnie dana jest prosta m oraz punkty A i B leżące po przeciwnych stronach prostej m. Znaleźć na prostej m taki punkt M, żeby różnica odległości tego punktu od punktów A i B była jak największa. (VI OM)

Rozwiązanie. Niech B_1 będzie obrazem B w symetrii względem prostej m. Różnice $|BM - AM|$ i $|B_1M - AM|$ są równe. Z nierówności trójkąta (różnica dwóch boków jest mniejsza od trzeciego) wynika, że punkt M powinien leżeć na prostej AB_1. Jeśli prosta AB_1 jest równoległa do prostej m, to punktu M o żądanej własności nie ma.

14. Wewnątrz boku AB trójkąta ABC wybrano punkt M_0. Obiekt M rozpoczyna ruch z punktu M_0 poruszając się najpierw równolegle do boku BC do chwili trafienia w bok AC w punkcie M_1. Następnie porusza się równolegle do boku AB aż do trafienia w bok BC w punkcie M_2. Potem porusza się równolegle do boku AC, a gdy trafi w punkt M_3 boku AB zmienia kierunek ruchu na równoległy do boku BC itd. Dowieść, że w pewnej chwili trafi w punkt M_0.

Rozwiązanie. Czworokąty $M_0M_1M_2B$ i $AM_1M_2M_3$ są równoległobokami, co wynika od razu z konstrukcji punktów $M_1, M_2, M_3, \ldots$. Ponieważ $M_3M_4 \parallel M_2C$, więc odpowiednie kąty w trójkątach AM_3M_4 i M_1M_2C są równe, zatem te trójkąty są podobne, a ponieważ $M_1M_2 = AM_3$, więc nawet przystające. Przystaje do nich też trójkąt M_6BM_5, bo czworokąty $M_6M_5M_4A$ i $BM_5M_4M_3$ są równoległobokami. Stąd wynika, że $M_6B = AM_3 = M_1M_2 = M_0B$. Widzimy więc, że $M_6 = M_0$, co dowodzi tezy.

15. a) Dane są punkty A, B, C nie leżące na prostej. Wyznaczyć takie trzy proste wzajemnie równoległe i przechodzące odpowiednio przez punkty A, B, C, żeby odstępy między sąsiednimi prostymi równoległymi były równe.

b) Dane są punkty A, B, C, D nie leżące na płaszczyźnie. Wyznaczyć takie cztery płaszczyzny wzajemnie równoległe i przechodzące odpowiednio przez punkty A, B, C, D, żeby odstępy między sąsiednimi płaszczyznami równoległymi były równe. (III OM)

Rozwiązanie. a) Przypuśćmy, że proste a, b, c przechodzące odpowiednio przez punkty A, B, C i wzajemnie równoległe czynią zadość warunkowi zadania, to znaczy, że odstępy między sąsiednimi równoległymi są równe. Wówczas ta z prostych a, b, c, która leży między dwiema pozostałymi, jest od nich równo odległa. Niech tą prostą będzie, np. prosta b. W takim razie punkty A i C są równo odległe od prostej b i leżą po jej stronach przeciwnych; zatem prosta b przecina odcinek AC w jego środku M. Z tego, że punkty A, B, C nie leżą na prostej, wynika, że punkt M jest różny od punktu B.

Stąd konstrukcja: prowadzimy prostą b przez punkt B i przez środek M odcinka AC, a następnie prowadzimy przez punkty A i C proste a i c równoległe do prostej b. Wyznaczone w ten sposób proste równoległe a, b, c dają rozwiązanie zadania, gdyż punkty A i C, a zatem i proste a i c są równo odległe od prostej b i leżą po przeciwnych stronach tej prostej.

Rozwiązanie powyższe znaleźliśmy założywszy o szukanych prostych a, b, c, że prosta b leży między prostymi a i c; ponieważ ową prostą „wewnętrzną” może być równie dobrze a lub c, więc zadanie ma trzy rozwiązania.

b) Przypuśćmy, że płaszczyzny α, β, γ, δ, przechodzące odpowiednio przez punkty A, B, C, D i wzajemnie równoległe, czynią zadość warunkowi zadania, to znaczy, że odstępy między sąsiednimi płaszczyznami są równe. Niech płaszczyzny te leżą w kolejności α, β, γ, δ. Chcemy przez to powiedzieć, że płaszczyzna β jest równo odległa od płaszczyzn α i γ, a płaszczyzna γ jest równo odległa od płaszczyzn β i δ.

W takim razie punkty A i C są równo odległe od płaszczyzny β i leżą po jej stronach przeciwnych, zatem płaszczyzna β przechodzi przez środek M odcinka AC. Podobnie płaszczyzna γ przechodzi przez środek N odcinka BD. Z tego, że punkty A, B, C, D nie leżą na płaszczyźnie, wynika, że punkt M jest różny od punktu B, a punkt N jest różny od punktu C.

Wysnuwamy stąd następującą konstrukcję. Łączymy punkt B ze środkiem M odcinka AC, a punkt C ze środkiem N odcinka BD. Proste BM i CN są skośne; Gdyby bowiem leżały w jednej płaszczyźnie, to w tej samej płaszczyźnie leżałyby - wbrew założeniu - punkty A, B, C, D. Wiemy ze stereometrii, że przez dwie proste skośne BM i CN można poprowadzić dwie i tylko dwie płaszczyzny wzajemnie równoległe β i γ.

W tym celu prowadzimy przez punkt M prostą m równoległą do prostej CN, a przez punkt N prostą n równoległą do prostej BM; płaszczyzna β jest wówczas wyznaczona przez proste m i BM, a płaszczyzna γ — przez proste

n i CN.

Wreszcie przez punkty A i D prowadzimy płaszczyzny α i δ równoległe do płaszczyzn β i γ; możemy je wyznaczyć, prowadząc przez każdy z punktów A i D proste równoległe do prostych BM i CN.

Wyznaczone w ten sposób płaszczyzny α, β, γ, δ dają rozwiązanie zadania, gdyż punkty A i C, a zatem i płaszczyzny α i γ są równo odległe od płaszczyzny β i leżą po przeciwnych stronach płaszczyzny β — i tak samo płaszczyzny β i δ są równo odległe od płaszczyzny γ i leżą po przeciwnych stronach tej płaszczyzny.

Rozwiązanie powyższe znaleźliśmy założywszy o szukanych płaszczyznach, że leżą w kolejności α, β, γ, δ. Dla innych kolejności szukanych płaszczyzn znajdziemy w ten sam sposób inne rozwiązania zadania. Liczba wszystkich możliwych kolejności, czyli jak się inaczej mówi, permutacyj liter α, β, γ, δ wynosi $4!$, tj. 24. Zauważmy jednak, że dwie permutacje „odwrotne" jak np. α, β, γ, δ oraz δ, γ, β, α dają to samo rozwiązanie. Wobec tego zadanie ma $\frac{24}{2} = 12$ rozwiązań odpowiadających permutacjom: $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha\beta\delta\gamma$, $\alpha\gamma\beta\delta$, $\alpha\gamma\delta\beta$, $\alpha\delta\beta\gamma$, $\alpha\delta\gamma\beta$, $\beta\alpha\gamma\delta$, $\beta\alpha\delta\gamma$, $\beta\gamma\alpha\delta$, $\beta\delta\alpha\gamma$, $\gamma\alpha\beta\delta$, $\gamma\beta\alpha\delta$.

16. Dowieść, że jeżeli figura płaska ma dwie i tylko dwie osie symetrii, to te osie są prostopadłe. (IV OM)

Rozwiązanie. Niech proste ℓ i m będą osiami symetrii danej figury F. Niech n oznacza prostą symetryczną do m względem ℓ. Udowodnimy, że n też jest osią symetrii danej figury. Jeśli różne proste m i ℓ nie są prostopadłe, to $m \neq n \neq \ell$, wbrew temu, że F ma dokładnie dwie osie symetrii.

Jeżeli do figury F należy jakiś punkt A, to należy do niej również punkt B symetryczny do punktu A względem osi ℓ, następnie punkt C symetryczny do punktu B względem osi m, a dalej punkt D symetryczny do punktu C względem osi ℓ. Zauważmy, że odcinek AD jest symetryczny do odcinka BC względem osi ℓ, gdyż punkty A i D są odpowiednio symetryczne do punktów B i C względem tejże osi. W takim razie symetralna odcinka AD jest symetryczna do symetralnej odcinka BC (tj. do prostej m) względem osi ℓ, tzn. symetralną odcinka AD jest prosta n. Dowiedliśmy, że jeżeli do figury F należy jakiś punkt A, to należy do niej również punkt D, symetryczny do punktu A względem prostej n, czyli że n jest osią symetrii figury F.

Dowód polega na wykazaniu, że złożenie trzech symetrii: względem osi ℓ, względem osi m i znów względem osi ℓ, jest symetrią względem osi n.

17. Dowieść, że jeżeli figura płaska ma dwa różne środki symetrii, to ma ich nieskończenie wiele. (XX OM)

Rozwiązanie. Wykażemy, że punkt symetryczny do środka symetrii względem innego środka symetrii jest następnym środkiem symetrii. Stąd wynika, że jeśli figura ma dwa środki symetrii, to ma ich nieskoćzenie wiele: z dwóch otrzymujemy cztery (na prostej wyznaczonej przez dwa pierwsze), z czterech następnych sześć (w symetriach względem końców odcinka wyznaczonego przez pierwsze cztery), wię w sumie dziesięć środków symetrii. Z nich następnych osiemnaście (symetrie względem końców odcinka wyznaczonego przez dziesięć pierwszych środków symetrii), więc mamy już dwadzieścia osiem środków symetrii itd.

Niech O_1 i O_2 będą różnymi środkami symetrii figury F. Niech O_3 będzie punktem symetrycznym do O_1 względem O_2. Niech A będzie dowolnym punktem figury F, a B — punktem symetrycznym do punktu A względem punktu O_3. Udowodnimy, że B jest punktem figury F. Niech C będzie punktem symetrycznym do A względem punktu O_2. Ponieważ O_2 jest środkiem symetrii F, więc $C \in F$. Niech D będzie punktem symetrycznym do C względem punktu O_1. Ponieważ O_1 jest środkiem symetrii F, więc $D \in F$. Wreszcie niech E będzie obrazem D w symetrii względem O_2. Oczywiście $E \in F$. Ponieważ punkty C, O_1, D leżą na jednej prostej i O_1 jest środkiem odcinka CD, więc ich obrazy w symetrii względem punktu O_2, czyli punkty A, O_3, E też leżą na jednej prostej i O_3 jest środkiem odcinka AE. Z określenia punktu B wynika, że O_3 jest środkiem odcinka AB. Stąd wynika że $B = E$, więc $B \in F$.

Uwaga. W rozwiązaniu tego zadania powtórzone zostało rozumowanie z poprzedniego zadania. W istocie rzeczy udowodniliśmy, że jeśli izometria I przekształca figurę F na siebie, to obrazem środka symetrii F jest środek symetrii F. W zadaniu poprzednim: obrazem osi symetrii jest oś symetrii. W tym zadaniu izometrią była symetria względem O_1, a w poprzednim — symetria osiowa.

I jeszcze jedno: można uczniów zapytać, czy figura, która ma dwa (co najmniej) środki symetrii może być ograniczona, nawet nie po tym zadaniu, a przed nim, po zadaniu z osiami symetrii to pytanie może mieć zaskakującą, bo inną niż w wypadku osi symetrii, odpowiedź.

18. Dowieść, że jeżeli figura płaska o rozmiarach skończonych ma środek symetrii O i oś symetrii s, to punkt O leży na prostej s. (IX OM)

Rozwiązanie. Skorzystamy z uwagi do poprzedniego zadania. Obrazem punktu O w symetrii względem prostej s jest środek symetrii O' danej figury. Figura ta jest ograniczona, więc nie może mieć nieskończenie wielu środków symetrii (por. zadanie poprzednie), więc nie może mieć ich dwóch. Oznacza to, że $O = O_1$, a to jest możliwe tylko wtedy, gdy punkt O leży na prostej s.

19. Dowieść, że jeżeli punkt P porusza się w płaszczyźnie trójkąta ABC, to trójkąt $S_1S_2S_3$, którego wierzchołkami są środki ciężkości S_1, S_2 i S_3 trójkątów PBC, PCA i PAB nic zmienia kształtu ani wielkości. (X OM)

Rozwiązanie. Niech M i N będą środkami odcinków PA i PB. Wtedy $\frac{S_2C}{MC} = \frac{2}{3} = \frac{S_1C}{NC}$, zatem odcinek S_2S_1 jest równoległy do odcinka MN i $\frac{S_2S_1}{MN} = \frac{2}{3}$. Oczywiście $MN \parallel AB$ i $MN = \frac{1}{2}AB$. Stąd wynika, że

$$S_2S_1 = \tfrac{2}{3} \cdot MN = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot AB = \tfrac{1}{3} \cdot AB \quad \text{i} \quad S_2S_1 \parallel AB.$$

Analogicznie dowodzimy, że zachodzą wzory $S_3S_2 = \frac{1}{3} \cdot BC$ i $S_3S_2 \parallel BC$ oraz $S_1S_3 = \frac{1}{3} \cdot CA$ i $S_1S_3 \parallel CA$.

20. Dany trójkąt ABC podzielić prostą równoległą do danej prostej p na dwie części o równych polach. (XIV OM)

Rozwiązanie. Poprowadźmy przez punkty A, B, C proste a, b, c równoległe do prostej p. Przypuśćmy, że są to trzy różne proste; wówczas jedna z nich leży w pasie ograniczonym dwiema innymi. Niech to będzie prosta a; przecina ona bok BC w pewnym punkcie D. Jeśli $BD = DC$, poszukiwaną prostą jest AD; przypuśćmy, że $BD < DC$; w przypadku, gdy $BD > DC$, rozwiązanie jest analogiczne.

Pole trójkąta ABD jest mniejsze od pola trójkąta ADC, więc poszukiwana prosta (o ile istnieje) przecina odcinek AC w pewnym punkcie M, a odcinek DC w pewnym punkcie N. Trójkąty MNC i ADC są podobne, zatem pola ich są proporcjonalne do kwadratów odpowiednich boków:

$$(1) \qquad \frac{\text{pole}MNC}{\text{pole}ADC} = \frac{CN^2}{CD^2}.$$

Pola trójkątów ADC i ABC mających wspólną wysokość, są proporcjonalne do ich podstaw:

$$(2) \qquad \frac{\text{pole}ADC}{\text{pole}ABC} = \frac{CD}{CB}.$$

Mnożąc powyższe równości i uwzględniając, że

$$\text{pole}MNC = \frac{1}{2}\text{pole}ABC,$$

otrzymujemy

$$(3) \qquad CN^2 = \frac{1}{2}CB \cdot CD.$$

Odcinek CN jest zatem średnią geometryczną odcinków $\frac{1}{2}CB$ i CD. Możemy go zbudować w znany sposób, budując trójkąt prostokątny, w którym rzutami prostopadłymi z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną $\frac{1}{2}CB$ i CD.

Prowadząc $MN \parallel AD$, otrzymujemy żądany podział trójkąta, albowiem spełnione są wówczas równości (1), (2), (3), a z nich wynika łatwo, że

$$\text{pole}CMN = \tfrac{1}{2}\text{pole}ABC\,.$$

Gdy dwie z prostych a, b, c pokrywają się, zachodzi przypadek graniczny, w którym możemy jednak zastosować to samo rozumowanie co poprzednio. Jeżeli np. prosta a pokrywa się z prostą b, to punkt D pokrywa się z B; wnioskowanie poprzednie pozostaje słuszne i otrzymujemy

$$CN^2 = \frac{1}{2}CB^2.$$

Uwaga. Warunek: $\text{pole}MNC = -\frac{1}{2}\text{pole}ABC$ możemy zastąpić warunkiem ogólniejszym: $\text{pole}MNC = k \cdot \text{pole}ABC$, gdzie k oznacza dowolną liczbę wymierną. Zadanie rozwiązuje się tak samo. Szukany odcinek CN jest średnią geometryczną odcinków $k \cdot CB$ i CD.

21. Na stole bilardowym w kształcie kwadratu znajduje się kula. Kulą pchnięto tak, że odbiła się od bandy (kąt padania równa się kątowi odbicia) pod kątem α. Dowieść, że kula będzie się poruszać po łamanej zamkniętej wtedy i tylko wtedy, gdy $\tan\alpha$ jest liczbą wymierną. Siłę tarcia i wymiary kuli pomijamy. (XXI OM)

Rozwiązanie. Załóżmy dla uproszczenia, że stół bilardowy jest kwadratem o wierzchołkach w punktach $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$. Niech w chwili początkowej kula znajduje się w punkcie $P(a,b)$, gdzie $0 < a < 1$, $0 < b < 1$.

Oznaczmy przez v prędkość, z jaką się ona porusza w chwili początkowej, a przez α — kąt, jaki tworzy kierunek jej ruchu z osią x. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$. Jeśli $\alpha = 0^\circ$ lub $\alpha = 90^\circ$, to kula porusza się po odcinku równoległym do osi x lub y. Załóżmy więc, że $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Rozpatrzmy rzuty $P_x = P_x(t)$ i $P_y = P_y(t)$ odpowiednio na oś x i y punktu, w którym znajduje się kula w chwili t. Z warunków zadania wynika, że punkt P_x porusza się ruchem jednostajnym z prędkością $v_1 = v\cos\alpha$ po odcinku $\langle 0,\ 1\rangle$ na osi x z tym, że po każdym odbiciu kuli od boku $\overline{BC}$ lub $\overline{AD}$ kierunek ruchu punktu P_x zostaje zmieniony na przeciwny. Zatem w chwili $t_1 = \dfrac{2}{v_1} = \dfrac{2}{v\cos\alpha}$ punkt P_x po dwukrotnym obiegu odcinka $\langle 0,\ 1\rangle$ na osi x znajdzie się w punkcie początkowym i kierunek jego ruchu będzie taki sam, jak na początku.

Ogólnie, w chwili $t_n = \dfrac{2n}{v\cos\alpha}$, gdzie $n = 1, 2, \ldots$, punkt P_x będzie się znajdował w punkcie początkowym i kierunek jego ruchu będzie taki sam, jak na początku.

Analogicznie dowodzimy, że w momencie $t'_m = \frac{2m}{v_1} = \frac{2m}{v\sin\alpha}$, gdzie $m = 1, 2, \ldots$, punkt P_y, znajdzie się w punkcie początkowym i kierunek jego ruchu będzie taki sam, jak na początku.

Wobec tego kula powróci do punktu początkowego i kierunek jej ruchu będzie taki sam, jak w chwili początkowej wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka chwila t, że zarówno punkt P_x, jak i P_y będą w tej chwili znajdowały się w położeniu początkowym i kierunek ich ruchu będzie taki sam, jak na początku. Jest to równoważne temu, że istnieją takie liczby naturalne n i m, że $t = t_n$ i $t = t'_m$, tzn.

$$(1) \qquad \frac{2n}{v\cos\alpha} = \frac{2m}{v\sin\alpha}$$

Stąd $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{n}$ jest liczbą wymierną.

Na odwrót, gdy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{q}$ jest liczbą wymierną, to wystarczy przyjąć $n = p$ i $m = q$ i wtedy warunek (1) będzie spełniony.

22. Na stole bilardowym w kształcie trójkąta, którego miary kątów są współmierne, pchnięto kulę z pewnego punktu wewnętrznego. Kula odbija się od ścian zgodnie z prawem „kąt padania równy kątowi odbicia”. Udowodnić, że liczba kierunków, w jakich może się poruszać kula, jest skończona. (Zakładamy, że kula nie trafia w wierzchołek trójkąta). (XXII OM)

Rozwiązanie. Udowodnimy najpierw następujący

Lemat. Po dwukrotnym odbiciu kuli kolejno od boków $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trójkąta ABC kierunek ruchu kuli zmienia się o kąt $2\measuredangle BAC$.

Dowód. Rozpatrzmy obraz $AB'C$ trójkąta ABC w symetrii względem prostej AC oraz obraz $AB'C'$ trójkąta $AB'C$ w symetrii względem prostej AB'. Oznaczmy przez k, l, m kolejne wektory obrazujące ruch kuli, przez l', m' — obrazy wektorów l, m w pierwszej symetrii, a przez m'' — obraz wektora m' w drugiej symetrii.

Z prawa „kąt padania równy jest kątowi odbicia” wynika, że wektory k, l', m'' mają ten sam kierunek. Ponieważ złożenie rozważanych symetrii jest obrotem wokół punktu A o kąt $2\sphericalangle BAC$, więc trójkąt $AB'C'$ jest obrazem trójkąta ABC przy tym obrocie, a wektor m'' — obrazem wektora m. Wynika stąd, że kierunki wektorów k i m różnią się o kąt $2\sphericalangle BAC$.

Przystąpimy teraz do rozwiązania zadania. Ponieważ miary kątów trójkąta ABC są współmierne, więc istnieje taka liczba λ i liczby naturalne r, s, t, że $\sphericalangle BAC = r\lambda$, $\sphericalangle ABC = s\lambda$, $\sphericalangle ACB = t\lambda$. Stąd $\lambda(r+s+t) = \pi$. Oznaczając $n = r+s+t$ otrzymujemy, że $\lambda = \frac{\pi}{n}$.

Zatem na mocy lematu po parzystej liczbie odbić kierunek ruchu kuli zmienia się o kąt, którego miara jest parzystą wielokrotnością liczby $\lambda = \frac{\pi}{n}$, a więc jedną z liczb $2\lambda, 4\lambda, 6\lambda, \ldots, 2n\lambda = 2\pi$. Zatem po parzystej liczbie odbić ruch kuli może się odbywać po jednym z n kierunków. Podobnie po nieparzystej liczbie odbić ruch kuli może się odbywać po jednym z n kierunków. Łączna liczba kierunków, po których porusza się kula, jest więc nie większa od $2n$.

Uwaga. Analogicznie można udowodnić, że jeżeli w zadaniu trójkąt zastąpić dowolnym wielokątem, którego miary kątów są współmierne, to również liczba kierunków, po jakich może się poruszać kula w takim wielokącie, jest skończona.

23. W danym kącie wypukłym na płaszczyźnie biegnie promień światła odbijając się od ramion kąta zgodnie z zasadą, że kąt padania równa się kątowi odbicia. Promień, który trafi w wierzchołek kąta, zostaje pochłonięty. Udowodnić, że istnieje taka liczba naturalna n, że każdy promień może odbić się od ramion kąta co najwyżej n razy.

Rozwiązanie. Jeżeli promień światła wychodząc z punktu C odbija się od jednego z ramion danego kąta w punkcie P, a następnie od, drugiego ramienia w punkcie Q, to dokonując symetrii φ względem prostej OP, gdzie O jest wierzchołkiem danego kąta, stwierdzamy, że punkty C, P i $\varphi(Q)$ są współliniowe. Wynika to z równości kątów $\sphericalangle CPA = \sphericalangle QPO = \sphericalangle \varphi(Q)PO$. Wobec tego zadanie sprowadza się do następującego: Z punktu O prowadzimy półproste $m_1, m_2, \ldots, m_k, m_{k+1}, \ldots$ tak, że $\sphericalangle(m_i, m_{i+1}) = \theta$ dla $i = 1, 2, \ldots$. Należy udowodnić, że istnieje liczba naturalna n o tej własności, że każda półprosta m przechodząca przez pewien punkt położony wewnątrz kąta $\sphericalangle(m_1, m_2)$ i przecinająca półprostą m_2 przecina kolejno nie więcej niż n z narysowanych półprostych.

By to udowodnić, wystarczy tak obrać k, by $(k-2)\theta < \pi \leq (k-1)\theta$. Wtedy $\sphericalangle(m_2, m_{k+1}) = (k-1)\theta \geq \pi$ i półprosta m przecinając półprostą m_2 nie przetnie już półprostej m_{k+1}, ponieważ półproste m_3 i m_{k+1} nie leżą w tej samej półpłaszczyźnie otwartej wyznaczonej przez prostą zawierającą półprostą m_2. Tak więc półprosta m przetnie co najwyżej $k-1$ danych półprostych $m_2, m_3, \ldots, m_k$, gdzie $k - 2 < \frac{\pi}{\theta}$, to znaczy $k - 1 < \frac{\pi}{\theta} + 1$. Zatem promień światła odbije się od ramion danego kąta mniej niż $\frac{\pi}{\theta} + 1$ razy. Wystarczy więc przyjąć $n = \left[\frac{\pi}{\theta}\right] + 1$.

24. Udowodnić, że jeśli środkowa i dwusieczna wychodzące z wierzchołka B trójkąta ABC pokrywają się, to trójkąt $AB = BC$.

Rozwiązanie. Niech B_1 oznacza punkt symetryczny do punktu B względem środka boku ABC. Wtedy czworokąt AB_1CB jest równoległobokiem, w którym przekątna BB_1 dzieli kąt $\sphericalangle CBA$ na połowy, więc dzieli też kąt $\sphericalangle CB_1A$ na połowy. Stąd natychmiast wynika, że cztery kąty przy podstawach BB_1 trójkątów BB_1C i BB_1A są równe, więc te trójkąty są równoramienne.

25. Dwaj chłopcy kładą na prostokątnym stole monety pięciogroszowe przy czym moneta nie może być położona na drugiej nawet częściowo. Przegrywa ten, który nie może dołożyć monety. Wykazać, że rozpoczynający gracz może zapewnić sobie wygraną w tej grze.
Szkic rozwiązania. Pierwszy zaczyna od położenia monety na środku stołu, a potem kładzie monety symetrycznie względem środka stołu do położonych przez przeciwnika. Pierwszy wygra.

26. Skonstruować czworokąt $ABCD$ mając dane boki AB, BC, CD i DA wiedząc, że półprosta AC jest dwusieczną kąta BAD.
Szkic rozwiązania. Załóżmy, że $AD < AB$ i że $\sphericalangle DAB < 180°$. Niech D' oznacza punkt symetryczny do D względem prostej AC. Wtedy $CD' = CD$, $D'B = AB - AD$, co oznacza, że znane nam są wszystkie boki trójkąta $D'BC$. Możemy go więc skonstruować, następnie przedłużając bok BD' otrzymać punkt A itd.

27. Ile osi symetrii może mieć czworokąt, niekoniecznie wypukły?
Szkic rozwiązania. Jasne jest, że może mieć dokładnie jedną oś symetrii. Może to być deltoid, który nie jest rombem, niektórzy uważają, że deltoid nie musi być wypukły i tak właśnie zakładam w tym rozwiązaniu (na ogół jednak przyjmuję, że zgodnie z tradycją deltoidy są wypukłe). Jedną oś symetrii ma też trapez równoramienny, jeśli nie jest równoległobokiem. Chodzi o to, że obrazami wierzchołków czworokąta w symetrii przekształcającej go na siebie muszą być wierzchołki, boków — boki, kątów — kąty, przekątnych przekątne itp. Jeśli na osi symetrii leży jeden wierzchołek , to musi leżeć jeszcze jeden, bo liczba tych poza osią musi być parzysta. Wobec tego na osi symetrii może nie leżeć żaden wierzchołek lub mogą leżeć dwa wierzchołki czworokąta.

Czworokąt może mieć dwie osie symetrii. Jeśli obie zawierają wierzchołki, mamy do czynienia z rombem, jeśli żaden wierzchołek nie leży na osi symetrii — z prostokątem. Jeśli na jednej osi symetrii leżą wierzchołki, a na drugiej ich nie ma, to wszystkie boki są równe: jeśli wierzchołek A leży na osi symetrii to boki wychodzące z A są równe, jeśli wierzchołki A, B nie leża na osi symetrii, to albo oś symetrii jest symetralną boku AB, albo bok CD jest symetryczny do boku AB względem tej osi i wtedy $AB = CD$. Jednak wtedy czworokąt jest rombem symetrycznym, względem prostej przechodzącej przez środki przeciwległych boków, więc jest kwadratem, zatem ma cztery osie symetrii.

Stąd już łatwo wynika, że dokładnie trzech osi symetrii czworokąt mieć nie może, bo musiałaby wśród nich znaleźć się oś zawierająca przekątną (takie są co najwyżej dwie) oraz oś przechodząca przez środki dwóch przeciwległych boków (takie też są co najwyżej dwie), a jeśli są osi obu rodzajów, to czworokąt jest kwadratem.

Lublin, 21 września 2013: równania i układy równań

Twierdzenie 1 (o wielomianach symetrycznych)
Jeśli f jest wielomianem symetrycznym zmiennych x i y, to istnieje taki wielomian g zmiennych u i v, że równość $g(x+y, xy) = f(x,y)$ ma miejsce dla dowolnej pary liczb rzeczywistych (x,y).

Dowód. Wykażemy to twierdzenie przez indukcję względem stopnia wielomianu f. Jeśli stopień jest równy 1, to $f(x,y) = ax + by + c$. Ponieważ $a + c = f(1,0) = f(0,1) = b + c$, więc $a = b$. Wobec tego $f(x,y) = a(x+y) + c$, więc wystarczy przyjąć $g(u,v) = u + c$, by przekonać się, że twierdzenie jest prawdziwe dla wielomianów stopnia pierwszego.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wielomianów stopnia nie większego niż k i że f jest wielomianem stopnia $k+1$. Z twierdzenia o jednoznaczności współczynników wynika, że jeśli w zapisie wielomianu f występuje składnik $ax^r y^s$, to występuje też składnik $ax^s y^r$. Wystarczy więc tezę indukcyjną wykazać jedynie dla wielomianów postaci $ax^r y^s + ax^s y^r$. Jeśli $0 < r < s$, to $ax^r y^s + ax^s y^r = a(xy)^r (y^{s-r} + x^{s-r})$, zatem wystarczy w żądanej postaci przedstawić wielomian $y^{s-r} + x^{s-r}$, co jest możliwe dzięki założeniu indukcyjnemu. Pozostaje jedynie rozpatrzeć, że wielomian $x^{k+1} + y^{k+1}$. Mamy teraz

$$\begin{aligned} x^{k+1} + y^{k+1} &= x^{k+1} + x^k y + xy^k + y^{k+1} - xy(x^{k-1} + y^{k-1}) = \\ &= (x+y)(x^k + y^k) - xy(x^{k-1} + y^{k-1}), \end{aligned}$$

a ten wielomian można przedstawić w żądanej postaci na mocy założenia indukcyjnego. ■

Taki dowód jest oczywiście zbyt abstrakcyjny dla gimnazjalistów, ale można poćwiczyć na przykładach. A samo sformułowanie twierdzenia mówiącego, że jeśli dwa wielomiany przyjmują te same wartości dla wszystkich liczb rzeczywistych, to mają równe współczynniki jest kształcące. Nawet jeśli będzie to dla wielomianów kwadratowych, a raczej wielomianów stopnia nie większego od 2:
jeśli równość $ax^2 + bx + c = Ax^2 + Bx + C$ *zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej* x*,*
to $A = a$*,* $B = b$ *i* $C = c$*,*
a po udowodnieniu można zauważyć, że wystarczy założyć, że równość zachodzi dla trzech różnych liczb x (dla wielomianu stopnia ≤ 11 wystarczy dla 12 liczb).

Twierdzenie o wielomianach symetrycznych pozostaje w mocy dla dowolnej liczby zmiennych, ale wtedy trzeba zamiast $u = x + y$ i $v = xy$ mówić o zmiennych:

$u_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$,

$u_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_k + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_{k-1}x_k$

$u_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{k-2}x_{k-1}x_k$

. . . .

$u_k = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k$,

zwanych **elementarnymi wielomianami symetrycznymi**.

Czytelnik zauważy, że

$$(t + x_1)(t + x_2) \ldots (t + x_k) = u_k + t u_{k-1} + \cdots + t^{k-1} u_1 + t^k .$$

28. Dowieść, że jeżeli k jest liczbą naturalną, to

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \ldots (1 + x^{2^k}) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^m ,$$

gdzie m jest liczbą naturalną zależną od k; wyznaczyć m. (IX OM)

Rozwiązanie. Teza wynika z tego, że każda liczba naturalna może być zapisana w układzie dwójkowym w jeden tylko sposób. Oczywiście zachodzi równość $m = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$.

29. Rozłożyć na czynniki wyrażenie $a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3$. (IV OM)

Rozwiązanie. Widać od razu, że wyrażenie przyjmuje wartość 0 , gdy $a = b$ lub $b = c$, lub $c = a$. Wielomiany $a - b$, $b - c$ i $c - a$ są względnie pierwsze. Wobec tego całość jest podzielna przez iloczyn $(a - b)(b - c)(c - a)$. Iloraz jest wielomianem jednorodnym pierwszego stopnia zmiennych a, b, c , więc ma postać $\alpha a + \beta b + \gamma c$. Iloraz jest też symetryczny, tzn. zastąpienie trójki (a, b, c) jedną z trójek (a, c, b) , (b, a, c) , (b, c, a) , (c, a, b) lub (c, b, a) nie zmienia wartości tego ilorazu (licznik i mianownik mogą zmieniać znak ale jednocześnie). Wobec tego również wielomian $\alpha a + \beta b + \gamma c$ jest symetryczny, a to oznacza, że $\alpha = \beta = \gamma$ (przyjmując $a = 1, b{-}0, c = 0$ otrzymujemy tę samą wartość, co po podstawieniu $a = 0, b = 1, c = 0$ i po podstawieniu $a = 0,\ b = 0,\ c = 1$). Pozostaje znaleźć α . Niech $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$. Wtedy $a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3 = 6$ i $(a - b)(b - c)(c - a) = 2$, więc $\alpha = \frac{6}{2} = 3$ i wobec tego $3 = \alpha(0 + 1 + 2)$, co oznacza, że $\alpha = 1$, zatem

$$\frac{a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3}{(a - b)(b - c)(c - a)} = a + b + c ,$$

$$\text{czyli} \quad a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3 = (a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a)$$

30. Rozłożyć na czynniki wyrażenie $x^4(y - z) + y^4(z - x) + z^4(x - y)$. (V OM)

Rozwiązanie. Widać od razu, że wyrażenie przyjmuje wartość 0 , gdy $x = y$ lub $y = z$, lub $z = x$. Wielomiany $x - y$, $y - z$ i $z - x$ są względnie pierwsze. Wobec tego całość jest podzielna przez iloczyn $(x - y)(y - z)(z - x)$. Iloraz jest wielomianem jednorodnym drugiego stopnia, więc ma postać

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx .$$

Iloraz jest też symetryczny: zastąpienie trójki (x, y, z) jedną z trójek (x, z, y) ,

(y,x,z), (y,z,x), (z,x,y) lub (z,y,x) nie zmienia wartości tego ilorazu (licznik i mianownik mogą zmieniać znak ale jednocześnie). Wobec tego również wielomian $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx$ jest symetryczny, a to oznacza, że $A=B=C$ i $D=E=F$. Niech $x=2$, $y=1$ i $z=0$. Wtedy $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)=14$ oraz $(x-y)(y-z)(z-x)=-2$, więc otrzymujemy $-7=5A+2D$. Niech $x=1$, $y=0$, $z=-1$. Tym razem $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)=2$, $(x-y)(y-z)(z-x)=-2$, więc $-1=2A+D$, zatem $A=-1$, $D=-1$. Oznacza to, że

$$x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)(-x^2-y^2-z^2-xy-yz-zx).$$

Wielomianu $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx$ przedstawić w postaci iloczynu wielomianów pierwszego stopnia nie można, bo

$$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=\tfrac{1}{2}((x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2),$$

więc to wyrażenie zeruje się wyłącznie wtedy, gdy $x+y=y+z=z+x=0$, więc gdy $x=y=z=0$, a wielomian pierwszego stopnia trzech zmiennych zeruje się w nieskończenie wielu punktach.

31. Dla jakiej wartości m wielomian $x^3+y^3+z^3+mxyz$ jest podzielny przez $x+y+z$? (VII OM)

Rozwiązanie. Jeśli $z=-x-y$, to $z+x+y=0$, więc z podzielności wynika, że wtedy również

$$0=x^3+y^3-(x+y)^3+mxyz=$$
$$=x^3+y^3-x^3-y^3-3xy(x+y)-mxy(x+y)=(m-3)xy(x+y),$$

zatem $m=3$ (równość zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych x,y).

32. Rozłożyć na czynniki wyrażenie $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

Rozwiązanie. Wielomiany $x^3+y^3+z^3-3xyz$ i $x+y+z$ są symetryczne, więc ich iloraz też jest symetryczny. Oba są jednorodne, więc iloraz też jest jednorodny. Jasne, że jest to wielomian jednorodny stopnia 2. Wobec tego ten iloraz jest postaci $ax^2+ay^2+az^2+bxy+byz+bzx$. Jeśli $x=1$, $y=-1$ $z=1$, to $x^3+y^3+z^3-3xyz=4$ i $x+y+z=1$, więc $3a-b=4$, jeśli $x=y=1$ i $z=0$, to $x^3+y^3+z^3-3xyz=2$ i $x+y+z=2$, więc $2a+b=1$. Wobec tego $a=1$ i $b=-1$, czyli

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

Wielomian $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ rozkładalny nie jest, bo wielomian pierwszego stopnia, trzech zmiennych zeruje się w nieskończenie wielu punktach tworzących płaszczyznę, a

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\tfrac{1}{2}((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2),$$

więc wyrażenie to jest równe 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $x=y=z$, a te wszystkie te punkty leżą na jednej prostej.

33. Czy wielomian $x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ dzieli się: przez wielomian x^5-1, a przez — $x^4+x^3+x^2+x+1$?

Rozwiązanie. Wielomian $x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ nie jest podzielny przez x^5-1, bo nie zeruje się dla $x=1$. Dzieli się natomiast przez $x^4+x^3+x^2+x+1$, bo $x^{10}-1=(x^5+1)(x^5-1)=(x^5+1)(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ oraz
$x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1-(x^4+x^3+x^2+x+1)=$
$=x^4(x^{40}-1)+x^3(x^{30}-1)+x^2(x^{20}-1)+x(x^{10}-1)=$
$=(x^{10}-1)(x^4(x^{30}+x^{20}+x^{10}+1)+x^3(x^{20}+x^{10}+1)+x^2(x^{10}+1)+x)$.

34. Rozłożyć na czynniki $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$.

Rozwiązanie. Podstawiwszy $x=\pm y$ lub $x=\pm z$, lub $y=\pm z$, otrzymujemy 0. Wielomiany $x-y$, $x+y$, $x-z$, $x+z$, $y-z$ i $y+z$ są względnie pierwsze i są dzielnikami wyrażenia $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$, więc iloraz $\frac{x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)}{(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)}$ jest wielomianem. Oczywiście zerowego stopnia, więc jest liczbą. Podstawiając $x=0$, $y=1$ i $z=2$ otrzymujemy $\frac{x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)}{(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)}=-1$, więc $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)=$
$=-(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)=-(x-y)(x+y)(y-z)(y+z)(z-x)(z+x)$.

35. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$

Rozwiązanie. Jasne jest, że $xy=5$ i $x+y=6$ albo $xy=6$ i $x+y=5$. Rozwiązaniami są więc pary $(1,5)$, $(5,1)$, $(2,3)$ i $(3,2)$ — wynika to wszystko z tego, że rozwiązaniami układu równań $\begin{cases} x+y=b \\ xy=c \end{cases}$ są pierwiastki równania kwadratowego $x^2-bx+c=0$.

36. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x^2-yz=3, \\ y^2-zx=4, \\ z^2-xy=5. \end{cases}$

Rozwiązanie. Odejmując stronami pierwsze równanie od drugiego, a następnie drugie od trzeciego otrzymujemy dwie równości: $(y-x)(x+y+z)=1$ oraz $(z-y)(x+y+z)=1$. Wynika z nich, że $z-y=y-x$, czyli $y=\frac{1}{2}(x+z)$. Podstawiając tę wartość zamiast y w pierwszy i w trzecim równaniu i mnożąc każde z nich przez 2 otrzymujemy $6=2x^2-xz-z^2$ i $10=2z^2-xz-x^2$. Po pomnożeniu pierwszego równania przez 5 a drugiego przez 3 otrzymujemy równość $10x^2-5xz-5z^2=30=6z^2-3xz-3x^2$, więc

$$0=13x^2-2xz-11z^2==(x-z)(13x+11z).$$

Stąd $x=z$ lub $13x+11z=0$, w pierwszym przypadku mamy $x=y=z$, co jest niemożliwe, bo wtedy $3=x^2-yz=0$. W drugim $z=-\frac{13}{11}x$, więc $y=-\frac{1}{11}x$. Podstawiając otrzymane wielkości do pierwszego równania wyjściowego układu otrzymujemy $3 = x^2 - \frac{13}{121}x^2 = \frac{108}{121}x^2$, zatem $x^2 = \frac{121}{36}$ czyli $x = \pm\frac{11}{6}$ i wobec tego $y = \mp\frac{1}{6}$ oraz $z = \mp\frac{13}{6}$.

37. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 37, \\ x^2 + z^2 + xz = 28, \\ y^2 + z^2 + yz = 19. \end{cases}$

Rozwiązanie. Odejmujemy drugiego równanie od pierwszego i trzecie od drugiego: $(y-z)(x+y+z) = 9$ i $(x-y)(x+y+z) = 9$, zatem $y - z = x - y$, więc $y = \frac{1}{2}(x+z)$. Odejmujemy trzecie równanie od pierwszego:

$$18 = (x-z)(x+z+\tfrac{1}{2}(x+z)) = \tfrac{3}{2}(x^2 - z^2),$$

zatem $x^2 - z^2 = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12$. Z otrzymanej równości i z drugiego równania wynika, że $z^2(12 + z^2) = (xz)^2 = (28 - x^2 - z^2)^2 = (16 - 2z^2)^2$. Stąd otrzymujemy: $0 = 3z^4 - 76z^2 + 16^2 = 3z^2(z^2 - 4) - 64(z^2 - 4) = (z^2 - 4)(3z^2 - 64)$. Wobec tego $z = \pm 2$ i $xz = 28 - 12 - 2z^2 = 8$ lub $z = \pm\frac{8}{\sqrt{3}}$ i $xz = 28 - 12 - 2z^2 = -\frac{80}{3}$. Wynika stąd, że rozwiązaniami mogą być jedynie cztery trójki: $(\pm 4, \pm 3, \pm 2)$, $\left(\mp\frac{10}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$. Bez trudu sprawdzamy, że są one rozwiązaniami tego układu.

38. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ xy = 27. \end{cases}$

Rozwiązanie. Z drugiego równania wynika, że $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = 3$, więc $\sqrt[3]{x} = 1$ i $\sqrt[3]{y} = 3$ lub $\sqrt[3]{x} = 3$ i $\sqrt[3]{y} = 1$, więc $x = 1$ i $y = 27$ lub $x = 27$ i $y = 1$.

39. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = -11, \\ (x^2 - y^2)xy = 180. \end{cases}$

Rozwiązanie. Jasne jest, że liczby $x^2 - y^2$ i $-xy$ są pierwiastkami równania kwadratowego $0 = t^2 + 11t - 180 = t^2 + (20-9)t - 20 \cdot 9 = (t+20)(t-9)$. Wynika stąd, że $x^2 - y^2 = -20$ i $-xy = 9$ lub $x^2 - y^2 = 9$ i $-xy = -20$. W pierwszym przypadku mamy $y = -\frac{9}{x}$, więc $-20 = x^2 - y^2 = x^2 - \frac{81}{x}^2$, czyli $0 = x^4 + 20x^2 - 81 = (x^2 + 10)^2 - 181$. Stąd $x^2 = -10 \pm \sqrt{181}$, ale $x^2 \geq 0$, więc $x^2 = -10 + \sqrt{181}$, zatem $y^2 = 10 + \sqrt{181}$, czyli $x = \pm\sqrt{-10 + \sqrt{181}}$ i $y = \mp\sqrt{10 + \sqrt{181}}$. W drugim przypadku mamy $0 = x^2 - y^2 - 9 = x^2 - \frac{400}{x^2} - 9 = {}$ $= \frac{1}{x^2}(x^4 - 9x^2 - 400) = \frac{1}{x^2}(x^4 - (25-16)x^2 - 25 \cdot 16) = \frac{1}{x^2}(x^2 - 25)(x^2 + 16)$. Wynika stąd, że $x = \pm 5$ i $y = \pm 4$. Znaleźliśmy cztery pary liczb, które mogą być rozwiązaniami. Sprawdzamy, że każda z nich jest rozwiązaniem.

40. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x + y + z = 9, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1, \\ xy + yz + zx = 27. \end{cases}$

Rozwiązanie. Mamy $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy+yz+zx}{xyz}$. Stąd $xyz = xy + yz + zx = 27$. Dalej $(t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz = {=}t^3 - 9t^2 + 27t - 27 = {}$ $= (t-3)^3$. Lewa strona przyjmuje wartość 0 dla $t = x$, $t = y$ lub $t = z$, prawa tylko dla $t = 3$. Wobec ich równości mamy $x = y = z = 3$. Jest to jedyne rozwiązanie układu wyjściowego.

Można rozwiązywać nieco inaczej. Niech $u = x + y$, $v = xy$. Wtedy $z = 9 - u$, $v + u(9 - u) = 27$ i $v(9 - u) = 27$, zatem
$0 = (9 - u)(27 - u(9 - u)) - 27 = -u(9 - u)^2 + 27(9 - u) - 27 =$
$= (9-u)^3 - 9(9-u)^2 + 27(9-u) - 27 \overset{w=9-u}{=\!=\!=} w^3 - 9w^2 + 27w - 27 = (w-3)^3$,
więc $w = 3$, wtedy $u = 6$, $v = 9$, $z = 3$. Wynika stąd, że $x + y = 6$ i $xy = 9$, zatem $0 = 9 - x(6 - x) = 9 - 6x + x^2 = (3 - x)^2$. W końcu $x = y = 3$.

41. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x + y + z &= 9, \\ xy + yz + zx &= 26, \\ xyz &= 24. \end{cases}$

Rozwiązanie. Mamy $(t-x)(t-y)(t-z) = t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz = {=}t^3 - 9t^2 + 26t - 24 = {=}(t - 2)(t^2 - 7t + 12) = (t - 2)(t - 3)(t - 4)$. Wynika stąd, że $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$, tzn. $(x, y, z) = (2, 3, 4)$ lub $(x, y, z) = (2, 4, 3)$, lub $(x, y, z) = (3, 2, 4)$, lub $(x, y, z) = (3, 4, 2)$, lub $(x, y, z) = (4, 2, 3)$ lub $(x, y, z) = (4, 3, 2)$.

Oczywiście druga metoda z poprzedniego zadania też działa, ale nie będziemy jej powtarzać.

42. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x^5 - y^5 = 992, \\ x - y = 2. \end{cases}$

Rozwiązanie. Mamy $496 = \frac{x^5-y^5}{x-y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$. Wobec tego zachodzi równość $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = 496 = 16 \cdot 31 = 31(x - y)^4 = {=}31(x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4)$, zatem $30x^4 - 125x^3y + 185x^2y^2 - 125xy^3 + 30y^4 = 0$. Przyjmijmy $x = ty$ — można, bo $y \neq 0$ (dlaczego?). Po podstawieniu i skróceniu przez $5y^4$ otrzymujemy $6t^4 - 25t^3 + 37^2 - 25t + 6 = 0$. Zachodzą równości $6 \cdot 2^4 - 25 \cdot 2^3 + 37 \cdot 2^2 - 25 \cdot 2 + 6 = 2(6 \cdot 2^3 - 25 \cdot 2^2 + 37 \cdot 2 - 25 + 3) = {=}2^2(6 \cdot 2^2 - 25 \cdot 2 + 37 - 11) = 2^3(6 \cdot 2 - 25 + 13) = 0$. Liczba 2 jest więc pierwiastkiem równania $6t^4 - 25t^3 + 37^2 - 25t + 6 = 0$, więc liczba $\frac{1}{2}$ tez jest pierwiastkiem tego równania. Mamy $(t-2)(2t-1) = 2t^2 - 5t + 2$. Po podzieleniu otrzymujemy $6t^4 - 25t^3 + 37^2 - 25t + 6 = (2t^2 - 5t + 2)(3t^2 - 5t + 3)$. Ponieważ $3t^2 - 5t + 3 = 3(t - \frac{5}{6})^2 + 3 - 3 \cdot \frac{25}{36} \geq 3 - \frac{25}{12} > 0$, więc albo $y = 2x$ albo $x = 2y$. Jeśli $y = 2x$, to $0 = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 - 496 = (1+2+4+8+16)x^4 - 496 = {=}31(x^4 - 16)$. Wynika stąd od razu, że $x = 2$ i wtedy $y = 4$ lub $x = -2$ i wtedy $y = -4$. Para (2,4) nie spełnia wyjściowego układu, a para $(-2, -4)$ — spełnia. Jeśli $x = 2y$, to $0 = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 - 496 = (16+8+4+2+1)y^4 - 496 = {=}31(y^4 - 16)$, zatem $y = 2$ i wtedy $x = 4$ lub $y = -2$ i wtedy $x = -4$. Para $(-4, -2)$ nie spełnia układu wyjściowego, a para $(4, 2)$ — spełnia. Mamy więc dwa rozwiązania wyjściowego układu: $(-2, -4)$ i $(4, 2)$.

Można układ rozwiązać nieco inaczej. Mamy

$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4-496=(x-y)^4+5x^3y-5x^2y^2+5xy^3-496=$
$=(x-y)^4+5xy\big((x-y)^2+xy\big)-496=16+5xy(4+xy)-496=$
$=5(xy)^2+20(xy)-480=5\big((xy)^2+4(xy)-96\big)=5\big((xy+2)^2-100\big)$.

Wynika stąd, że $xy=8$ lub $xy=-12$, więc

$0=y(y+2)-8=(y+1)^2-9=(y-2)(y+4)$ lub

$0=y(y+2)+12=(y+1)^2+11\geq 11$.

Otrzymujemy więc te same rozwiązania, co poprzednio: $(4,2)$ i $(-2,-4)$.

43. Rozwiązać układ równań $\begin{cases}(x^3+y^3)(x^2+y^2)=2a^5,\\ x+y=a.\end{cases}$

Rozwiązanie. Jeśli $a=0$ i $y=-x$, to układ jest spełniony i innych rozwiązań w tym wypadku nie ma. Dalej zakładam, że $a\neq 0$. Ze znanej równości $x^3+y^3=$ $=(x+y)(x^2-xy+y^2)$, wynika więc, że $2a^4=(x^2-xy+y^2)(x^2+y^2)=$ $=((x+y)^2-3xy)((x+y)^2-2xy)=(a^2-3xy)(a^2-2xy)=a^4-5(xy)a^2+6(xy)^2$, więc $0=a^4+5(xy)a^2-6(xy)^2=(a^2+6xy)(a^2-xy)$, zatem albo $6xy=-a^2$ albo $a^2=xy$. Wobec tego $0=x^2-ax-\frac{a^2}{6}=(x-\frac{a}{2})^2-\frac{5a^2}{12}$ i $x=\frac{a}{2}\pm\frac{a}{6}\sqrt{15}$, $y=\frac{a}{2}\mp\frac{a}{6}\sqrt{15}$, albo $0=x^2-ax+a^2=(x-\frac{a}{2})^2+\frac{3}{4}a^2>0$, co jest niemożliwe.

44. Rozwiązać układ równań $\begin{cases}x+y=1,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1.\end{cases}$

Rozwiązanie. Ponieważ $x\geq 0$, $y\geq 0$ i $x+y=1$, więc $0\leq x\leq 1$ i $0\leq y\leq 1$. Stąd wynika, że $0\leq x\leq\sqrt{x}$ i $0\leq y\leq\sqrt{y}$, więc $1=x+y\leq\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$. Wobec tego $\sqrt{x}=x$ i $\sqrt{y}=y$. oznacza to, że $x=0$ lub $x=1$ oraz $y=0$ lub $y=1$. Wobec tego albo $x=0$ i $y=1$, albo $x=1$ i $y=0$.

45. Rozwiązać układ równań $\begin{cases}x^2+y^2=uv,\\ u^2+v^2=xy.\end{cases}$

Rozwiązanie. Mamy $0\leq(u-v)^2=u^2+v^2-2uv$, zatem $2uv\leq u^2+v^2$ przy czym ta nierówność staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $u=v$. Wobec tego $2xy\leq 2x^2+2y^2=2uv\leq u^2+v^2=xy$. Ponieważe $xy=u^2+v^2\geq 0$ i $2xy\leq xy$, więc $xy=0$. Co więcej $0=2xy\leq x^2+y^2\leq xy=0$, zatem $x=y=0$.

46. Rozwiązać w liczbach naturalnych układ $\begin{cases}x+y=uv,\\ u+v=xy.\end{cases}$

Rozwiązanie. Jeśli $0\in\mathbb{N}$, to trzeba rozważyć przypadek, że co najmniej jedna z czterech niewiadomych jest zerem. Niech np. $u=0$. Wtedy $x+y=0$, więc $x=y=0$. Również $v=xy-u=0$. Dalej zakladam, że wszystkie niewiadome są dodatnie. Mamy

$0\leq(u-1)(v-1)=uv-(u+v)+1=x+y-xy+1=2-(x-1)(y-1)$, zatem $(x-1)(y-1)=0$, $(x-1)(y-1)=1$ albo $(x-1)(y-1)=2$.

Jeśli $x=1$, to $(u-1)(v-1)=2$, więc $u=2$ i $v=3$ lub $u=3$ i $v=2$ oraz $y=uv-x=5$. Analogicznie, gdy $y=1$, to $x=5$ i $u=2,\ v=3$ lub $u=3,\ v=2$.

Jeśli $x=2=y$, to $(u-1)(v-1)=1$, więc $u=2=v$.

Jeśli $x=2,\ y=3$ albo $x=3,\ y=2$, to $(u-1)(v-1)=0$, więc $u=1$ i wtedy $v=5$ lub $v=1$ i wtedy $u=5$.

47. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \frac{x+y}{1+xy} = \frac{2a}{1+a^2}, \\ \frac{x-y}{1-xy} = \frac{2b}{1+b^2}, \end{cases}$ gdzie a, b są danymi liczbami rzeczywistymi.

Rozwiązanie. Zauważmy, że jeśli para (x, y) jest rozwiązaniem układu równań, to również para $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ jest jego rozwiązaniem. Mamy też $\frac{1/a}{1+(1/a)^2} = \frac{a}{1+a^2}$. Możemy więc zakładać bez straty ogólności, że $|a| \le 1$ i analogicznie $|b| \le 1$.

Jeśli $a=1$, to $x+y=1+xy$ czyli $(1-x)(1-y)=0$. Jeżeli $x=1$, to $\frac{2b}{1+b^2} = \frac{1-y}{1-y}$, zatem $b=1$. Układ jest spełniony przez każdą parę liczb postaci $(1,y)$. Jeśli $y=1$, to $\frac{2b}{1+b^2} = \frac{x-1}{1-x} = -1$, zatem $b=-1$ i wtedy każda para liczb postaci $(x,1)$ jest rozwiązaniem układu równań.

Jeśli $a=-1$, to $1+xy=-(x+y)$, więc $(1+x)(1+y)=0$, zatem $x=-1$ i wtedy $b=-1$ lub $y=-1$ i wtedy $b=1$. W pierwszym wypadku rozwiązaniami są pary postaci $(-1,y)$, a w drugim — postaci $(x,-1)$.

Podobnie, można przedyskutować przypadki $b=1$ i $b=-1$. Gdy $b=1$ rozwiązaniami są pary postaci $(1,y)$, gdy $a=1$ oraz $(x,-1)$, gdy $a=-1$. Przypadek $b=-1$ można sprowadzić do przypadku $b=1$ przez jednoczesną zmianę znaków obu niewiadomych.

W dalszym ciągu zakładamy, że $|a|<1$ i $|b|<1$. Istnieją takie liczby $\alpha>0$, $\beta>0$, że $a=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ i $b=\frac{\beta-1}{\beta+1}$. Z założeń o liczbach a i b wynika, że $x,y \notin \{-1,0,1\}$. Można więc napisać, $x=\frac{u-1}{u+1}$ dla pewnego $u \notin \{0,1\}$. Analogicznie $y=\frac{v-1}{v+1}$ dla pewnego $v \notin \{0,1\}$. Wtedy

$$\frac{x+y}{1+xy} = \frac{\frac{u-1}{u+1}+\frac{v-1}{v+1}}{1+\frac{u-1}{u+1}\cdot\frac{v-1}{v+1}} = \frac{uv-1}{uv+1}.$$

Analogicznie $\frac{x-y}{1-xy} = \frac{u-v}{u+v}$, $\frac{2a}{1+a^2} = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}$ i $\frac{2b}{1+b^2} = \frac{\beta^2-1}{\beta^2+1}$. Równania przybierają więc postać $\frac{uv-1}{uv+1} = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}$, $\frac{u-v}{u+v} = \frac{\frac{u}{v}-1}{\frac{u}{v}+1} = \frac{\beta^2-1}{\beta^2+1}$. Z otrzymanych równości i różnowartościowości funkcji $t \mapsto \frac{t-1}{t+1} = 1-\frac{2}{t+1}$ wynika, że $uv=\alpha^2$ i $\frac{u}{v}=\beta^2$. Stąd $u^2=\alpha^2\beta^2$ i $v^2=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$, zatem $u=\alpha\beta$ i $v=\frac{\alpha}{\beta}$ lub $u=-\alpha\beta$ i $v=-\frac{\alpha}{\beta}$.

Z równości $a = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ wynika, że $\alpha = \frac{1+a}{1-a}$. Analogicznie $\beta = \frac{1+b}{1-b}$. Otrzymujemy

$$x = \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta + 1} = \frac{\frac{1+a}{1-a}\frac{1+b}{1-b} - 1}{\frac{1+a}{1-a}\frac{1+b}{1-b} + 1} = \frac{(1+a)(1+b) - (1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b) + (1-a)(1-b)} = \frac{a+b}{1+ab}$$

oraz

$$y = \frac{\frac{\alpha}{\beta} - 1}{\frac{\alpha}{\beta} + 1} = \frac{\frac{1+a}{1-a}\frac{1-b}{1+b} - 1}{\frac{1+a}{1-a}\frac{1-b}{1+b} + 1} = \frac{(1+a)(1-b) - (1-a)(1+b)}{(1+a)(1-b) + (1-a)(1+b)} = \frac{a-b}{1-ab}$$

lub $x = \frac{1+ab}{a+b}$ i $y = \frac{1-ab}{a-b}$.

Podamy jeszcze jedno rozwiązanie tego zadania, bo można spodziewać się, że nie wszyscy czytający tekst wpadną od razu na pomysł podstawień użytych w przedstawionym rozwiązaniu. Jest on w istocie rzeczy naturalny, ale tylko z punktu widzenia osób, które wiedzą, co to jest tangens hiperboliczny i znają wzory na tangens hiperboliczny sumy dwu liczb (bardzo podobne do wzoru na tangens sumy dwóch kątów). Niżej prezentujemy rozwiązanie wymagające jedynie cierpliwego przekształcania wzorów wyglądających mało zachęcająco. Jednak drobny pomysł skraca przekształcenia.

Zaczynamy od wyznaczenia x z pierwszego równania: $x = \frac{2a-y-a^2y}{1+a^2-2ay}$. Tę wielkość wstawiamy do drugiego równania pomnożonego przez mianowniki:
$0 = (1+b^2)\big((2a-y-a^2y)-y(1+a^2-2ay)\big)-2b\big((1+a^2-2ay)-y(2a-y-a^2y)\big) =$
$= 2\Big(a(1+b^2)-b(1+a^2)-\big((1+a^2)(1+b^2)-4ab\big)y+\big(a(1+b^2)-b(1+a^2)\big)y^2\Big) =$
$= 2\Big((a-b)(1-ab)-\big((a-b)^2+(1-ab)^2\big)y+(a-b)(1-ab)y^2\Big) =$
$= 2\big(a-b-(1-ab)y\big)\big((1-ab)-y(a-b)\big)$, zatem $y = \frac{a-b}{1-ab}$ lub $y = \frac{1-ab}{a-b}$.

48. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x_1x_2 = 1, \\ x_2x_3 = 2, \\ x_3x_4 = 3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1}x_n = n-1, \\ x_nx_1 = n. \end{cases}$

Rozwiązanie. Załóżmy, że n jest liczbą parzystą. Niech $n = 2m$ dla pewnej liczby naturalnej $m > 0$. Mnożąc pierwsze równanie przez trzecie, potem przez piąte itd. otrzymujemy $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \ldots \cdot x_{2m-1} \cdot x_{2m} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-1)$, zaś mnożąc drugie przez czwarte, potem przez szóste itd otrzymujemy $x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot \ldots \cdot x_{2m-2} \cdot x_{2m-1} \cdot x_{2m} \cdot x_1 = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2m \neq 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-1)$, co oznacza, że w tym wypadku układ rozwiązań nie ma.

Teraz zajmiemy się nieparzystym n. Niech $n = 2m+1$. Mnożąc wszystkie równania stronami otrzymujemy

$$x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 \cdot x_4^2 \cdot \ldots \cdot x_{2m}^2 \cdot x_{2m+1}^2 = (2m+1)!\,.$$

Mamy zatem

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \ldots \cdot x_{2m} \cdot x_{2m+1} = \sqrt{(2m+1)!}\,.$$

Iloczyny każdych dwu kolejnych niewiadomych są dodatnie, więc wszystkie liczby $x_1, x_2, \ldots, x_{2m+1}$ mają ten sam znak. Ciąg liczb $x_1, x_2, \ldots, x_{2m+1}$ jest rozwiązaniem układu wtedy i tylko wtedy, gdy Ciąg liczb $-x_1, -x_2, \ldots, -x_{2m+1}$ jest rozwiązaniem układu. Znajdziemy dodatnie rozwiązania. Mnożąc pierwsze równanie przez trzecie, potem przez piąte itd. aż do ostatniego otrzymujemy $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \ldots \cdot x_{2m+1} \cdot x_1 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m+1)$. Wynika stąd, że $x_1 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m+1)}{\sqrt{(2m+1)!}}$. Pozwala to na obliczenie kolejnych niewiadomych:

$x_2 = \frac{1}{x_1}$, $x_3 = \frac{2}{x_2} = 2x_1$, $x_4 = \frac{3}{x_3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x_1}$, $x_5 = \frac{4}{x_4} = \frac{4\cdot 2}{3}\cdot x_1$, $x_6 = \frac{5}{x_5} = \frac{5\cdot 3}{4\cdot 2}\cdot\frac{1}{x_1}$, $x_7 = \frac{6}{x_6} = \frac{6\cdot 4\cdot 2}{5\cdot 3}\cdot x_1$, $x_8 = \frac{7}{x_7} = \frac{7\cdot 5\cdot 3}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{1}{x_1}$, itd.

49. Dowieść, że jeśli $a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2$ i $ab + cd = 0$, to $|ad - bc| = 1$, $a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2$ i $ac + bd = 0$.

Rozwiązanie. Z równości

$$c^2d^2 = (-ab)^2 = a^2b^2 = (1-c^2)(1-d^2) = 1 - c^2 - d^2 + c^2d^2$$

wynika od razu, że $c^2 + d^2 = 1$. Stąd $a^2 + b^2 = 1 - c^2 + 1 - d^2 = 2 - 1 = 1$. Mamy $(ad-bc)^2 = a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 = a^2(1-b^2) - 2ab(-ab) + b^2(1-a^2) = a^2 + b^2 = 1$. Również $(ac+bd)^2 = a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 = a^2(1-a^2) - 2a^2b^2 + b^2(1-b^2) = $ $=a^2 + b^2 - (a^2+b^2)^2 = 1 - 1 = 0$.

Można też użyć trygonometrii (w liceum). Ponieważ $a^2 + c^2 = 1$, więc istnieje taka liczba α, że $a = \cos\alpha$ i $c = \sin\alpha$. Istnieje też taka liczba β, że $b = \cos\beta$ i $d = \sin\beta$. Mamy $0 = ab + cd = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$. Stąd wynika, że istnieje taka liczba całkowita n że $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Wobec tego
$\cos\alpha = \cos(\beta + \frac{\pi}{2} + n\pi) = (-1)^n\cos(\beta + \frac{\pi}{2}) = (-1)^{n+1}\sin\beta$ oraz
$\sin\alpha = \sin(\beta + \frac{\pi}{2} + n\pi) = (-1)^n\sin(\beta + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n\cos\beta$.

Mamy więc

$a^2 + b^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,

$c^2 + d^2 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,

$ad - bc = \cos\alpha\sin\beta - \cos\beta\sin\alpha = \sin(\beta - \alpha) = \sin(-\frac{\pi}{2} - n\pi) = (-1)^{n+1}$ oraz

$ac + bd = \cos\alpha\sin\alpha + \cos\beta\sin\beta = (-1)^{2n+1}\cos\beta\sin\beta + \cos\beta\sin\beta = 0$.

50. Dowieść, że jeśli $a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2$ i $ab + cd = -\frac{1}{2}$, to zachodzi wzór $a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2$. (XX OM)

Rozwiązanie. Zachodzą następujące równości:

$$1 - a^2 - b^2 + a^2b^2 = (1-a^2)(1-b^2) = c^2d^2 = (-ab - \tfrac{1}{2})^2 = a^2b^2 + ab + \tfrac{1}{4},$$

zatem $a^2 + ab + b^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Wobec tego

$$c^2 + cd + d^2 = 1 - a^2 - \tfrac{1}{2} - ab + 1 - b^2 = \tfrac{3}{2} - (a^2 + ab + b^2) = \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

Można też skorzystać z wzorów trygonometrycznych, które kiedyś młodzież licealna znała, a teraz ma w tablicach maturalnych. Niech $a = \cos\alpha$, $c = \sin\alpha$, $b = \cos\beta$, $d = \sin\beta$ — takie liczby α, β istnieją, bo $a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2$.

Mamy $-\frac{1}{2} = ab + cd = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$. Wynika stąd, że $\alpha - \beta = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ dla pewnej liczby całkowitej n. Wobec tego

$$\cos\alpha = \cos(\beta \pm \tfrac{2\pi}{3} + 2n\pi) = \cos(\beta \pm \tfrac{2\pi}{3}) =$$
$$= \cos\beta\cos\tfrac{2\pi}{3} \mp \sin\beta\sin\tfrac{2\pi}{3} = -\tfrac{1}{2}\cos\beta \mp \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta.$$

Możemy teraz napisać

$$a^2 + ab + b^2 = \cos^2\alpha + \cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta =$$
$$= \left(-\tfrac{1}{2}\cos\beta \mp \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta\right)^2 + \cos\beta\left(-\tfrac{1}{2}\cos\beta \mp \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta\right) + \cos^2\beta$$
$$= \tfrac{1}{4}\cos^2\beta \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta\sin\beta + \tfrac{3}{4}\sin^2\beta - \tfrac{1}{2}\cos^2\beta \mp \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta\sin\beta + \cos^2\beta =$$
$$= \tfrac{3}{4}\cos^2\beta + \tfrac{3}{4}\sin^2\beta = \tfrac{3}{4}.$$

Uwaga. Pokazaliśmy rozwiązania trygonometryczne w dwóch ostatnich zadaniach, bo co prawda uczniowie liceum (tym bardziej gimnazjum) o nich nie pomyślą, ale nauczyciel może z tej metody skorzystać, by rozwiązać zadanie w jakikolwiek sposób, a potem ewentualnie przerobić rozwiązanie na dostępne dla uczniów. Kiedyś operowanie wzorami trygonometrycznymi było rzeczą naturalną w szkołach, dokładniej w dwu ostatnich klasach czteroletniego LO, jeszcze wcześniej, przed wynalezieniem logarytmów w XVII wieku, używano ich do obliczeń, więc część ludzi bardzo sprawnie nimi operowała.

51. Dowieść, że jeśli $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ i $ab + cd = 0$, to $a = \pm d$ i $b = \mp c$.

Rozwiązanie. Zachodzą równości

$$0 = c^2d^2 - a^2b^2 = (b^2 + d^2 - a^2)(b^2 + d^2 - b^2) =$$
$$= (b^2 + d^2)^2 - (a^2 + b^2)(b^2 + d^2) + a^2b^2 - a^2b^2 =$$
$$= (b^2 + d^2)(b^2 + d^2 - a^2 - b^2) = (b^2 + d^2)(d^2 - a^2),$$

zatem $d^2 = a^2$, czyli $a = \pm d$. Ponieważ $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = b^2 + a^2$, więc $c^2 = b^2$. Stąd i z równości $ab = -cd$ wynika, że $b = \mp c$.

Uwaga. W zasadzie powtarzamy tu zadanie 49. Tezę można wypowiedzieć geometrycznie: jeśli wektor $[b, d]$ jest prostopadły do wektora $[a, c]$ i oba mają tę samą długość, to $[b, d] = \pm[-c, a]$. To, że warunek $ab + cd = 0$ nadaje się na łatwe zadanie na zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, (a, c) i (b, d).

52. Dowieść, że jeśli $a^2+k^2+p^2 = b^2+m^2+q^2 = c^2+n^2+r^2 = d^2$, $ab+km+pq = 0$, $bc + mn + qr = 0$ i $ac + kn + pr = 0$, $d > 0$, to $a = \pm\frac{mr-nq}{d}$, $k = \pm\frac{cq-br}{d}$ i $p = \pm\frac{bn-cm}{d}$.

Rozwiązanie. Zachodzą równości

$$(mr - nq)^2 + (cq - br)^2 + (nb - mc)^2 =$$
$$= (mr)^2 + (nq)^2 + (cq)^2 + (br)^2 + (nb)^2 + (mc)^2 - 2mnqr - 2bcqr - 2bcmn =$$

$= (bc)^2 + (bn)^2 + (br)^2 + (mc)^2 + (mn)^2 + (mr)^2 + (qc)^2 + (qn)^2 + (qr)^2 -$

$- (bc)^2 - (mn)^2 - (qr)^2 - 2mnqr - 2bcqr - 2bcmn =$

$= (b^2 + m^2 + q^2)(c^2 + n^2 + r^2) - (bc + mn + qr)^2 = d^2 \cdot d^2 - 0^2 = d^4 .$

Wynika stąd w szczególności, że co najmniej jedna z liczb $mr - nq$, $cq - br$, $bn - cm$ jest różna od 0. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że jest nią $cq - br$. Z równości $ab + km + pq = 0$ i $ac + kn + pr = 0$ wynika, że

$$0 = q(ac + kn + pr) - r(ab + km + pq) = a(cq - br) + k(nq - mr) .$$

Z poprzedniego zadania wynika, że istnieje taka liczba $t \neq 0$, że

$$a = -t(nq - mr) = t(mr - nq) \text{ i } k = t(cq - br) .$$

Z równości $ab + km + pq = 0$ i $ac + kn + pr = 0$ wynika, że

$0 = b(ac + kn + pr) - c(ab + km + pq) = k(bn - cm) + p(br - cq) =$

$= t(cq - br)(bn - cm) + p(br - cq) = (cq - br)(t(bn - cm) - p) .$

Wobec tego $p = t(bn - cm)$. Ponieważ

$$d^2 = a^2 + k^2 + p^2 = t^2(mr - nq)^2 + t^2(cq - br)^2 + t^2(cm - bn)^2 = t^2 d^4 ,$$

więc $t = \pm\frac{1}{d}$.

Uwaga. Można oczywiście napisać podobne wzory na b, m, q lub c, n, r w zależności od pozostałych wielkości. Zadanie można wypowiedzieć w języku geometrii. Dane są trzy wektory o równej długości, wzajemnie prostopadłe. Wtedy każdy z nich jest równy z dokładnością do znaku iloczynowi dwóch pozostałych podzielonemu przez wspólną długość wyjściowych wektorów.

53. Dowieść, że jeśli $\begin{cases} a^2 + k^2 + p^2 = 1, \\ b^2 + m^2 + q^2 = 1, \\ c^2 + n^2 + r^2 = 1 \end{cases}$ i $\begin{cases} ab + km + pq = 0, \\ bc + mn + qr = 0, \\ ca + nk + rp = 0, \end{cases}$

to $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ k^2 + m^2 + n^2 = 1, \\ p^2 + q^2 + r^2 = 1 \end{cases}$ i $\begin{cases} ak + bm + cn = 0, \\ kp + mq + nr = 0, \\ pa + qb + rc = 0. \end{cases}$

Rozwiązanie. To zadanie jest trudne nawet dla dobrego ucznia w LO, chociaż rozwiązanie nie będzie długie. Metoda rozwiązania pokazana poniżej może też być użyta w celu rozwiązania zadań 49 – 51. W pewnym sensie jest najbardziej naturalna.

Będziemy korzystać z rezultatu uzyskanego w poprzednim zadaniu. Przyjmujemy teraz $a = mr - qn$, $k = qc - br$ i $p = bn - mc$. Mając te wzory bez trudu sprawdzamy, że teza ma miejsce. Na przykład

$a^2 + b^2 + c^2 = (mr - nq)^2 + b^2 + c^2 = m^2r^2 + n^2q^2 - 2mnqr + b^2 + c^2 =$

$= m^2r^2 + n^2q^2 + mn(bc + mn) + qr(bc + qr) + b^2 + c^2 =$

$= m^2r^2 + n^2q^2 + m^2n^2 + q^2r^2 + bc(mn + qr) + b^2 + c^2 =$

$= m^2(c^2 + n^2 + r^2) + q^2(c^2 + n^2 + r^2) - c^2(m^2 + q^2) + bc(-bc) + b^2 + c^2 =$

$= m^2 + q^2 - c^2(b^2 + m^2 + q^2) + b^2 + c^2 = m^2 + q^2 - c^2 + b^2 + c^2 = b^2 + m^2 + q^2 = 1 .$

Analogicznie uzyskujemy równości $k^2 + m^2 + n^2 = 1$ i $p^2 + q^2 + r^2 = 1$.

Teraz udowodnimy, że $ak+bm+cn = 0$. Po podstawieniu odpowiednich wielkości za a, b, c otrzymujemy

$$ak + bm + cn = k(mr - nq) + m(np - kr) + n(kq - mp) = 0\,.$$

Podobnie sprawdzić można pozostałe równości, ale nie trzeba tego robić, bo można zauważyć, że zarówno założenia jak i teza są symetryczne, co pozwala po prostu zastąpić jedne litery innymi.