Zadania z analizy matematycznej

Zaczniemy od początku. Trzeba brać pod uwagę, że istotna część studentów I roku nie spotkała się w rzeczywistości z żadnymi dowodami w szkołach, choć to znów powoli się zmienia, bo na maturze pojawia się słowo *dowód.* Jednak można zdać maturę na poziomie dowolnym i zostać przyjętym na studia nie przeprowadziwszy samodzielnie wcześniej żadnego dowodu. Oznacza to niestety, że na początku ćwiczeń z dowolnego zresztą przedmiotu jesteśmy zmuszeni tłumaczyć, na czym polega dowodzenie w matematyce. Jedną z pierwszych rzeczy jest indukcja. Pewnym problem na początku staje się dowodzenie twierdzeń, których tezę należy nieco wzmocnić, by dowód stał się możliwy lub przynajmniej by był prosty. Jeden z najprostszych przykładów to

Zadanie 1.1 Niech $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Dowieść, że $a_n \geq 2^n$ dla $n = 1, 2, \ldots$

Zadanie jest trywialne, ale trzeba nieco wzmocnić dowodzoną indukcyjnie tezę, bo potrzebujemy oszacowania a_n obu stron. Wystarczy dowodzić, że $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ oraz $a_n \geq 2^n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ ■

Następne zadanie na indukcję i nie tylko.

Zadanie 1.2 Niech $a_0 = 0$ i $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(x^2 - a_n^2)$ dla pewnego $x \in [-1, 1]$. Udowodnić, że $|x| = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

W sformułowaniu tego zadania formalnie rzecz biorąc żadnej indukcji nie ma (poza definicją ciągu). Ale trzeba udowodnić zbieżność ciągu. Udowodnimy, że $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ oraz $a_n \leq |x| \leq 1$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Po napisaniu tego zdania dowód przebiega już bardzo prosto: jeśli $0 \leq a_n \leq |x|$, to $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(x^2 - a_n^2) \geq a_n$ oraz $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(x^2 - a_n^2) = a_n + \frac{1}{2}(|x| - a_n)(|x| + a_n) \leq a_n + \frac{1}{2}(|x| - a_n)(1 + 1) = |x|$. Ciąg (a_n) jest więc ograniczony z góry i niemalejący, więc zbieżny do pewnej granicy $g \in [0, 1]$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$, więc $g = g + \frac{1}{2}(x^2 - g^2)$. Wobec tego $g = |x|$. I już. ■

To zadanie warto zrobić na zajęciach, bo z niego wynika, że funkcja $|x|$ jest granicą ciągu wielomianów jednostajnie zbieżnego na przedziale $[-1, 1]$. Prowadzi to do dowodu twierdzenia Weierstrassa o przybliżaniu funkcji ciągłych wielomianami. Krok pośrednie to wykazanie, że funkcję ciągłą można przybliżać jednostajnie funkcjami przedziałami liniowymi. Inny krok pośredni to

Zadanie 1.3 Niech $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_y \in \mathbb{R}$. Funkcja $f\colon [x_0, x_n] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest liniowa na każdym z przedziałów $[x_{i-1}, x_i]$ oraz spełnia warunek $f(x_i) = y_i$ dla $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Wyrazić wartość $f(x)$ wzorem w zależności od $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_y$. ■

Później warto zrobić zadanie, które niektórzy rozwiązują w czasie wykładu.

Zadanie 1.4 Załóżmy, że $f_n \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ i $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ i każdego $x \in [a, b]$ oraz, że dla każdego $x \in [x_0, x_n]$ ciąg (f_n) jest ograniczony z góry. Niech $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))$. Udowodnić, że jeśli wszystkie funkcje $f, f_1, f_2, \ldots$ są ciągłe to ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji f. ■

A teraz zadanie spoza analizy, z trzeciego stopnia XVI OM.

Zadanie 1.5 Udowodnić, że jeśli liczby a, b są całkowite oraz

$$2a^2 + a = 3b^2 + b\,,$$

to liczby $a - b$ i $2a + 2b + 1$ są kwadratami liczb całkowitych.

Mamy $b^2 = 2a^2 + a - 2b^2 - b = (a-b)(2a+2b+1)$. Jeśli liczba pierwsza p dzieli liczby $a-b$ i $2a+ab+1$, to dzieli też liczbę b i liczbę $\big(2a+2b+1-2(a-b)\big)-4b = 4b+1-4b = 1$, więc nie ma takiej liczby pierwszej. Stąd i z równości $b^2 = (a-b)(2a+2b+1)$ wynika, że każdy czynnik pierwszy liczby $a-b$ pojawia się w jej rozkładzie na czynniki pierwsze tyle samo razy ile w rozkładzie liczby b^2 na czynniki pierwsze, więc w parzystej potędze. To samo można powiedzieć o czynnikach pierwszych liczby $2a+2b+1$. No to już, prawda?

Ależ skąd! Przecież nie wiemy, czy liczba $a-b$ jest nieujemna! To trzeba wykazać i to korzystając z całkowitości liczb a, b, bo bez trudu można znaleźć liczby **rzeczywiste**, dla których spełniona jest równość $2a^2+a = 3b^2+b$ i $a < b$, np. $b = 1$, $a = -\frac{1}{4}(1+\sqrt{33})$.

Załóżmy, że $a - b < 0$, więc że istnieją takie liczby całkowite k, ℓ, że

$$a - b = -k^2 \quad \text{i} \quad 2a + 2b + 1 = -\ell^2\,. \tag{1}$$

Liczba $3b^2 + b = b(3b + 1)$ jest parzysta, więc liczba $2a^2 + a$ też jest parzysta i wobec tego liczba a jest parzysta. Z równań (1) wynika, że $a = \frac{1}{4}\left(-2k^2 - \ell^2 - 1\right)$. Ponieważ a jest liczbą całkowitą, więc liczba ℓ jest nieparzysta. Istnieje więc taka liczba całkowita n, że $\ell = 2n + 1$. Wobec tego $a = \frac{1}{4}\left(-2k^2 - 4n(n + 1) - 2\right)$. Stąd wynika, że k jest liczbą nieparzystą, więc istnieje taka liczba całkowita m, że $k = 2m + 1$. Wobec tego $a = -2(4m^2+4m+1)-4n(n+1)-2) = -2m^2-2m-n(n+1)-1$, co oznacza, że liczba a jest nieparzysta, wbrew wcześniejszym ustaleniom. Założenie $a < b$ doprowadziło do sprzeczności, więc $a \geqslant b$. Dopiero teraz zakończyliśmy dowód. ■

A teraz można jeszcze przed młodzieżą postawić problemik; Jakie pary liczb spełniają równanie $2a^2+a=3b^2+b$. Można je potraktować jako równanie z niewiadomą a i parametrem b:

$$2a^2+a-(3b^2+b)=0\,.$$

Równanie kwadratowe, więc $\Delta_a=1+8(3b^2+b)$. Aby rozwiązanie a było całkowite musi istnieć taka liczba całkowita c, że $1+8(3b^2+b)=c^2$, czyli $24b^2+8b+1-c^2=0$. To znów równanie kwadratowe, z niewiadomą b. $\Delta_b=64-96(1-c^2)=32(3c^2-1)$. Aby rozwiązanie b było całkowite musi istnieć taka liczba całkowita d, że $3c^2-1=2d^2$.

Jeśli takie liczby c,d istnieją, to $b=\frac{-8-8d}{48}=-\frac{1+d}{6}$ lub $b=\frac{-8+8d}{48}=-\frac{1-d}{6}$, więc b jest całkowite, gdy reszta z dzielenia liczby b przez 6 jest równa 5 lub 1. Wtedy $a=\frac{-1-c}{4}$ lub $a=\frac{-1+c}{4}$, więc jeśli c jest nieparzysta, to jedna z tych liczb jest całkowita, a druga nie.

Jeśli $3c^2-1=2d^2$, to oczywiście $c\neq 0\neq d$ i $\frac{3}{2}=\frac{d^2}{c^2}+\frac{1}{2c^2}$. Widać więc, że $\frac{d}{c}\approx\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ dla „dużych" liczb c. Zajmijmy się liczbą $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Mamy

$\sqrt{\frac{3}{2}}=1+\frac{\sqrt{6}-2}{2}=1+\frac{1}{\sqrt{6}+2}=1+\frac{1}{4+\sqrt{6}-2}=1+\frac{1}{4+\frac{2}{\sqrt{6}+2}}=1+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{\sqrt{6}+2}{2}}}=$
$=1+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{\sqrt{6}-2}{2}}}=1+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\ldots}}}}$, bo liczba $\frac{\sqrt{6}-2}{2}$ pojawiła się ponownie, więc wszystko zaczyna powtarzać się.

Przedstawiliśmy liczbę $\sqrt{\frac{3}{2}}$ jako tzw. ułamek łańcuchowy.

Kolejne ułamki wyglądają tak:

$$1=\frac{1}{1},\ 1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4},\ 1+\frac{1}{4+\frac{1}{2}}=\frac{11}{9},\ 1+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}=\frac{49}{40},\ \frac{109}{89},\ \frac{485}{396},\ \frac{1079}{881},\ \ldots \tag{U}$$

Ich kwadraty to $\frac{1}{1}<\frac{3}{2}$, $\frac{25}{16}>\frac{3}{2}$, $\frac{121}{81}<\frac{3}{2}$, $\frac{2401}{1600}>\frac{3}{2}$, $\frac{11881}{7921}<\frac{3}{2}$, $\ldots$

Trzy zadania na indukcję i zdrowy rozsądek.

Zadanie 1.6 Udowodnić, że jeśli $\frac{p_n}{q_n}$ jest n–tym ułamkiem tego ciągu, przy czym $p_0=1=q_0$, to $p_{n+2}=a_{n+1}p_{n+1}+p_n$ i $q_{n+2}=a_{n+1}q_{n+1}+p_n$, przyjmujemy tu $a_1=4$, $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=2$, $\ldots$

Możemy zastąpić liczbę $\sqrt{\frac{3}{2}}$ dowolną liczbą rzeczywistą $x>0$. Wzory na p_{n+2} oraz q_{n+2} podane w treści zadania nie zmienią się. ■

Zadanie 1.7 Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą wzory

$$\begin{vmatrix} p_{n+1} & p_n \\ q_{n+1} & q_n \end{vmatrix}=(-1)^{n-1} \quad \text{i} \quad \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(-1)^{n-1}}{q_n\cdot q_{n+1}}.\ ■$$

Zadanie 1.8 Udowodnić, że jeśli liczby r i $s>0$ są całkowite i liczba $\frac{r}{s}$ znajduje się między liczbami $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ i $\frac{p_n}{q_n}$, to zachodzi nierówność $|s|>q_{n+1}$. ■

Wracamy do równania. Przyjrzyjmy się tym ułamkom z wiersza (U), które są mniejsze od $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Widzimy, że $3\cdot 1^2-2\cdot 1^2=1$, $3\cdot 9^2-2\cdot 11^2=1$, $3\cdot 89^2-2\cdot 109^2=1$, $3\cdot 881^2-2\cdot 1079^2=1$, ...

Niech $\delta=5d+6c$, $\gamma=4d+5c$. Jeśli $3c^2-2d^2=1$, to

$$3\gamma^2-2\delta^2=3(4d+5c)^2-2(5d+6c)^2=3c^2-2d^2=1.$$

Mamy „maszynkę" do wskazywania następnych rozwiązań równania $3c^2-2d^2=1$.[1] Wskazane już rozwiązania otrzymujemy z rozwiązania $d=1,\ c=1$: $11=5\cdot 1+6\cdot 1$, $9=4\cdot 1+5\cdot 1$. Następnie $109=5\cdot 11+6\cdot 9$ oraz $89=4\cdot 11+5\cdot 9$ itd. Innych rozwiązań nie ma, co wykażemy zaraz.

Łatwo można zauważyć, że $\delta=5d+6c$ i $\gamma=4d+5c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d=5\delta-6\gamma$ i $c=5\gamma-4\delta$. Zakładamy, że liczby γ,δ są dodatnie i $3\gamma^2-2\delta^2=1$. Wtedy również $3c^2-2d^2=3(5\gamma-4\delta)^2-2(5\delta-6\gamma)^2=3\gamma^2-2\delta^2=1$.
Mamy też $c=5\gamma-4\delta=5\sqrt{\frac{1+2\delta^2}{3}}-4\delta=\frac{25(1+2\delta^2)-3\cdot 16\delta^2}{3(5\sqrt{\frac{1+2\delta^2}{3}}+4\delta)}=\frac{25+2\delta^2}{3(5\sqrt{\frac{1+2\delta^2}{3}}+4\delta)}>0$,
$d=5\delta-6\gamma=5\delta-6\sqrt{\frac{1+2\delta^2}{3}}=\frac{25\delta^2-12(1+2\delta^2)}{5\delta+6\sqrt{\frac{1+2\delta^2}{3}}}=\frac{\delta^2-12}{5\delta+6\sqrt{\frac{1+2\delta^2}{3}}}>0$, gdy $\delta>3$, $c-\gamma=4(\gamma-\delta)<0$ oraz
$d-\delta=4\delta-6\gamma=2\left(2\delta-3\sqrt{\frac{1+2\delta^2}{3}}\right)=2\frac{4\delta^2-3(1+2\delta^2)}{2\delta+3\sqrt{\frac{1+2\delta^2}{3}}}=2\frac{-2\delta^2-3}{2\delta+3\sqrt{\frac{1+2\delta^2}{3}}}<0$.

Wykazaliśmy, że przejście od pary liczb całkowitych (δ,γ), do pary (d,c) powoduje zmniejszenie obu elementów pary przy zachowaniu ich dodatniości. Oznacza, to, że po skończenie wielu takich operacjach wartość liczby δ stanie się mniejsza od 3, a taka para jest tylko jedna (z dokładnością do znaków): $(1,1)$.

Dodajmy jeszcze, że dzieląc kolejne liczby d, czyli liczby $d_0=1$, $d_1=11$, $d_2=109$, $d_3=1079$,... przez 6 otrzymujemy reszty 1,5,1,5,..., bowiem $5\cdot 1\equiv 5 (\text{mod } 6)$ oraz $5\cdot 5\equiv 1(\text{mod } 6)$. Z wzoru $b=\frac{-1\pm d}{6}$ otrzymujemy więc kolejno liczby całkowite b: $b_0=0$, $b_1=-2$, $b_2=18$, b_3-180, ... Odpowiadające im liczby a otrzymujemy z równości $a=\frac{-1\pm c}{4}$: $a_0=0$, $a_1=2$, $a_2=22$, $a_3=220$, ...

Można uzyskać jawne wzory (temat na następne zadanie) na c_n i d_n korzystając z równości

$$\begin{cases} d_{n+1}=5d_n+6c_n\\ c_{n+1}=4d_n+5c_n\end{cases}$$

Mnożąc pierwszą z nich przez 5 i odejmując od wyniku drugą pomnożoną przez 6 otrzymujemy $5d_{n+1}-6c_{n+1}=d_n$, czyli $6c_{n+1}=5d_{n+1}-d_n$. Stąd i z równości

[1] Wiem z własnego doświadczenia, że te wzory można zobaczyć wpatrując się w ułamki z ciągu (U), jeśli wierzy się mocno w istnienie takich wzorów. Można też uzyskać je z wzorów rekurencyjnych z zadania 1.

$d_{n+2} = 5d_{n+1} + 6c_{n+1}$ otrzymujemy wzór $d_{n+2} = 10d_{n+1} - d_n$. Znajdziemy takie liczby rzeczywiste q, że $q^{n+2} = 10q^{n+1} - q^n$. Ciągi (q^n) będą zdefiniowane takim samym wzorem rekurencyjnym jak ciąg (d_n). Dzieląc stronami przez q^n i przenosząc wszystko na jedną stronę otrzymujemy $0 = q^2 - 10q + 1 = (q-5)^2 - 24$. Wobec tego są dwie takie liczby $q_1 = 5 - \sqrt{24} = 5 - 2\sqrt{6}$ oraz $q_2 = 5 + \sqrt{24} = 5 + 2\sqrt{6}$. Znajdziemy takie liczby A, B, że $d_n = Aq_1^n + Bq_2^n$ dla $n = 0, 1, 2\dots$. Wystarczy, aby tak było dla $n = 0$ i $n = 1$, bo następne wyrazy, we **wszystkich trzech wypadkach** wyliczane są z wzoru $d_{n+2} = 10d_{n+1} - d_n$. Mają więc być spełnione równości

$$\begin{cases} d_0 = 1 = Aq_1^0 + Bq_2^0 = A + B \\ d_1 = 11 = Aq_1^1 + Bq_2^1 = A(5 - 2\sqrt{6}\,) + B(5 + 2\sqrt{6}\,) \end{cases}$$

Otrzymujemy $11(5 - 2\sqrt{6}\,) - 1 = A(5 - 2\sqrt{6}\,)^2 - A = A(48 - 20\sqrt{6}\,)$. Wynika stąd, że $A = \frac{54-22\sqrt{6}}{4(12-5\sqrt{6}\,)} = \frac{(27-11\sqrt{6}\,)(12+5\sqrt{6}\,)}{2(144-150)} = \frac{-6+3\sqrt{6}}{-12} = \frac{2-\sqrt{6}}{4}$ i wobec tego $B = \frac{2+\sqrt{6}}{4}$. Możemy napisać, że $d_n = \frac{2-\sqrt{6}}{4} \cdot (5 - 2\sqrt{6}\,)^n + \frac{2+\sqrt{6}}{4} \cdot (5 + 2\sqrt{6}\,)^n$.

Wzór na c_n można uzyskać w podobny sposób. Postąpimy jednak nieco inaczej. Skorzystamy z wyprowadzonego już wzoru $d_{n+1} = 5d_n + 6c_n$. Wyznaczamy z niego

$$6c_n = d_{n+1} - 5d_n = \tfrac{2-\sqrt{6}}{4} \cdot (5 - 2\sqrt{6}\,)^{n+1} + \tfrac{2+\sqrt{6}}{4} \cdot (5 + 2\sqrt{6}\,)^{n+1} -$$
$$- 5\big(\tfrac{2-\sqrt{6}}{4} \cdot (5 - 2\sqrt{6}\,)^n + \tfrac{2+\sqrt{6}}{4} \cdot (5 + 2\sqrt{6}\,)^n\big) =$$
$$= (-2\sqrt{6}\,)\tfrac{2-\sqrt{6}}{4} \cdot (5 - 2\sqrt{6}\,)^n + 2\sqrt{6}\tfrac{2+\sqrt{6}}{4} \cdot (5 + 2\sqrt{6}\,)^n =$$

$= (3 - \sqrt{6}\,) \cdot (5 - 2\sqrt{6}\,)^n + (3 + \sqrt{6}\,) \cdot (5 + 2\sqrt{6}\,)^n$. Wynika stąd, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór $c_n = \frac{3-\sqrt{6}}{6} \cdot (5 - 2\sqrt{6}\,)^n + \frac{3+\sqrt{6}}{6} \cdot (5 + 2\sqrt{6}\,)^n$. ■

Widać wyraźnie, że pojawiła się tu też w tle bardzo elementarna algebra liniowa. Warto zapewne na ćwiczeniach powiedzieć wyraźnie, że zbiór ciągów spełniających układ równań rekurencyjnych jest przestrzenią liniową, dwuwymiarową i następnie oświadczyć, że szukamy w niej „ładnej” bazy.

Natrafiliśmy na tzw. ułamki łańcuchowe. Pokażemy teraz jak można je wykorzystać do dowodu niewymierności liczby π — tym razem nie będzie żadnych całek, które zwykle są używane w demonstrowanym dowodzie tego twierdzenia. Obecnie przedstawiane jest ono zwykle w obudowie dosyć odstraszającej na wejściu, bo autorzy powtarzają przekształcenia pochodzące od Gaussa, który badał szeregi hipergeometryczne, więc szeregi postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a \cdot (a+1) \cdot \dots \cdot (a+n-1) \cdot b(b+1) \cdot \dots \cdot (b+n-1)}{c(c+1) \cdot \dots \cdot (c+n-1)} \frac{z^n}{n!},$$

gdzie $a, b, c, z \in \mathbb{C}$. Rozumowanie, które pokażę to przeróbka pierwszego dowodu niewymierności pochodzącego od niemieckiego matematyka J. Lamberta. Dowód skrócił i „wyczyścił” Miklós Laczkovicz z Budapesztu (The American Mathematical Monthly, vol. 104, No 5, May 1997, pp. 439–443), a jeszcze wcześniej Gauss i inni. Tekst poniżej to tłumaczenie pracy Laczkovicza z nieistotnymi zmianami. W rozumowaniu Lamberta nie było luk, to był pełny, poprawny dowód, ale to zrozumiano po kilkudziesięciu latach. Myślimy teraz o drugim semestrze, co będzie widać wyraźnie. Dla dowodu niewymierności π nie potrzeba aż tyle, więc będziemy rozważać funkcje zdefiniowane wzorem

$$f_k(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2\cdot k} + \frac{x^4}{2^4\cdot k\cdot(k+1)\cdot 2!} - \frac{x^6}{2^6\cdot k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot 3!} + \dots,$$

gdzie $k \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$. Oczywiście pierwszy problem to ustalenie promienia zbieżności szeregu (łatwe zadanie, które można rozwiązać znacznie wcześniej). Oczywiście promieniem zbieżności jest ∞. Na pytanie skąd się biorą takie funkcje nie odpowiadamy, po prostu są i już, ale

$$f_{1/2}(x) = 1 - \tfrac{x^2}{2^2\cdot\frac12} + \tfrac{x^4}{2^4\cdot\frac12\cdot\frac32\cdot 2!} - \tfrac{x^6}{2^6\cdot\frac12\cdot\frac32\cdot\frac52\cdot 3!} + \dots =$$
$$= 1 - \tfrac{x^2}{1\cdot 2} + \tfrac{x^4}{1\cdot3\cdot2\cdot4} - \tfrac{x^6}{1\cdot3\cdot5\cdot2\cdot4\cdot6} + \dots = \cos x,$$

a także

$$f_{3/2}(x) = 1 - \tfrac{x^2}{2^2\cdot\frac32} + \tfrac{x^4}{2^4\cdot\frac32\cdot\frac52\cdot 2!} - \tfrac{x^6}{2^6\cdot\frac32\cdot\frac52\cdot\frac72\cdot 3!} + \dots =$$
$$= 1 - \tfrac{x^2}{3\cdot 2} + \tfrac{x^4}{3\cdot5\cdot2\cdot4} - \tfrac{x^6}{3\cdot5\cdot7\cdot2\cdot4\cdot6} + \dots = \tfrac{\sin x}{x}.$$

Oczywiście nie należy sprawiać wrażenia, że każdy matematyk zajmujący się niewymiernością π wpada natychmiast na pomysł prowadzący do tych wzorów i przekształceń, które pojawią się za moment.

Możemy napisać teraz równość $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{f_{3/2}(x)}{f_{1/2}(x)}$, co może wyglądać dziwnie w pierwszej chwili, ale niebawem się okaże w czym rzecz. Zachodzą równości:

$$f_{k+1}(x) - f_k(x) = \tfrac{x^2}{2^2\cdot 1!}\left(\tfrac1k - \tfrac{1}{k+1}\right) - \tfrac{x^4}{2^4\cdot 2!}\left(\tfrac{1}{k(k+1)} - \tfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right) +$$
$$+ \tfrac{x^6}{2^6\cdot 3!}\left(\tfrac{1}{k(k+1)(k+2)} - \tfrac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right) - \tfrac{x^8}{2^8\cdot 4!}\left(\tfrac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} - \tfrac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\right) +$$
$$+ \dots = \tfrac{x^2}{4k(k+1)}\left(1 - \tfrac{x^2}{k+2} + \tfrac{x^4}{2!(k+2)(k+3)} - \tfrac{x^6}{3!(k+2)(k+3)(k+4)}\right) + \dots = \tfrac{x^2}{4k(k+1)} f_{k+2}(x),$$ czyli

$$\frac{x^2}{4k(k+1)} f_{k+2}(x) = f_{k+1}(x) - f_k(x)\,. \tag{U1}$$

Stąd otrzymujemy równość $1 - \frac{f_k(x)}{f_{k+1}(x)} = \frac{x^2 f_{k+2}(x)}{4k(k+1) f_{k+1}(x)}$, równoważną następującej:

$$\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2 f_{k+2}(x)}{4k(k+1)f_{k+1}(x)}}\,. \tag{U2}$$

Lemat 1. (łatwe zadanie)

Dla każdej liczby zespolonej x zachodzi równość $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 1$.

Dowód. Mamy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n}}{n!}=0$, więc istnieje taka liczba $K>0$, że $\frac{|x|^{2n}}{n!}\le K$ dla $n=1,2,\ldots$. Stąd wynika, że $|\frac{x^{2n}}{2^n\cdot k(k+1)\ldots(k+n-1)n!}\le\frac{K}{k^n}$ dla każdego $k>1$ i dowolnego $n\ge 1$. Możemy więc oszacować liczbę $|f_k(x)-1|$ przez sumę szeregu geometrycznego o ilorazie $\frac{1}{k}$. Otrzymujemy $|f_k(x)-1|\le\frac{K}{k(1-\frac{1}{k})}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$, czyli tezę. ∎

Przechodzimy do dowodu niewymierności π.

Lemat 2. (zasadnicza część rozumowania)
Jeśli $x\neq 0$ i $x^2\in\mathbb{Q}$, to $f_k(x)\neq 0$ i $\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}\notin\mathbb{Q}$ dla $k\in\mathbb{Q}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$.
Dowód. Niech $x\neq 0$ i $x^2\in\mathbb{Q}$ i niech $k\in\mathbb{Q}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$. Z wzoru (U1) wynika, że jeśli dwa kolejne wyrazy ciągu (f_{k+n}) są zerami, to wszystkie następne też — indukcja. To jednak jest niemożliwe dla $x\neq 0$, bo $\lim\limits_{n\to\infty}f_{k+n}(x)=0$.

Załóżmy, że $f_k(x)=0$ lub $\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}\in\mathbb{Q}$. Istnieją wtedy takie liczby całkowite a,b i taka liczba $y\neq 0$, że $f_k(x)=ay$ oraz $f_{k+1}(x)=by$. Nie wykluczamy tego, że $a=0$ lub $b=0$.

Niech $q>0$ będzie taką liczbą naturalną, że $\frac{bq}{k},\frac{kq}{x^2},\frac{q}{x^2}\in\mathbb{Z}$. Niech $G_0(x)=f_k(x)$ oraz

$$G_n=\frac{q^n}{k(k+1)\ldots(k+n-1)}f_{k+n}(x)\ \text{ dla }\ n=1,2,\ldots.$$

Z równości $f_{k+n+1}(x)-f_{k+n}(x)=\frac{x^2}{4(k+n)(k+n+1)}f_{k+n+2}(x)$ wynika związek

$$\frac{x^2q^{n+2}f_{k+n+2}(x)}{4k(k+1)\ldots(k+n)(k+n+1)}=\frac{(k+n)q^{n+2}f_{k+n+1}(x)}{k(k+1)\ldots(k+n)}-\frac{q^{n+2}f_{k+n}(x)}{k(k+1)\ldots(k+n-1)}.$$

Mamy więc

$$G_{n+2}=\frac{4(k+n)q}{x^2}G_{n+1}-\frac{4q^2}{x^2}G_n=4\left(\frac{kq}{x^2}+n\frac{q}{x^2}\right)G_{n+1}-4\frac{q^2}{x^2}G_n\,.$$

Współczynniki przy G_{n+1} i G_n w ostatnim wzorze są całkowite, zatem wszystkie liczby w ciągu (G_n) są całkowitymi wielokrotnościami liczby $y\neq 0$. Dla dostatecznie dużych n zachodzi $|f_{n+k}(x)-1|<1$, więc $f_{n+k}(x)\neq 0$, zatem $G_n\neq 0$. Ciąg całkowitych wielokrotności liczby y różnych od 0 nie jest zbieżny do 0, a oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty}G_n=0$. Doszliśmy do sprzeczności. Lemat został wykazany. ∎

Wniosek 1. $\pi^2\notin Q$.
Dowód. Załóżmy, że $\pi^2\in Q$. Mamy $f_{1/2}(\frac{\pi}{2})=\cos\frac{\pi}{2}=0$, wbrew lematowi 2. Zakończyliśmy dowód niewymierności π, a nawet π^2. ∎

Wniosek 2. Jeśli $x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, to $\operatorname{tg}x\notin Q$.
Dowód. Z lematu 2. zastosowanego dla $k=\frac{1}{2}$ wynika, że liczba $\frac{f_{3/2}(x)}{f_{1/2}(x)}=\frac{\operatorname{tg}x}{x}$ nie jest wymierna, więc z wymierności mianownika wynika niewymierność licznika. ∎

Zadanie 1.9 Udowodnić, że jeśli $\cos\alpha=\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$, $NWD(p,q)=1$ i $q\ge 3$, to $\frac{\alpha}{\pi}\notin\mathbb{Q}$.

To zadanie pojawiło się kiedyś na zawodach II stopnia Olimpiady Matematycznej (z $p = 1$, $q = 3$), zresztą jest dosyć znane. Można dać je studentom ze wskazówką: $\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$. Lepsi studenci powinni dać sobie wtedy radę. ■

Przedstawimy teraz funkcję tangens w postaci nieskończonego ułamka łańcuchowego. Ten fragment też pochodzi z przywołanej wcześniej pracy M. Laczkovicza. Zazwyczaj w dowodzie niewymierności liczby π rozwinięcia, które pojawią się niebawem, były wykorzystywane, ale M. Laczkovicz zdołał uprościć dowód i uniknąć ich użycia w rozumowaniu.

Skorzystamy wielokrotnie z równości (U2) (dla $k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$):

$$\operatorname{tg} x = x\frac{f_{3/2}(x)}{f_{1/2}(x)} = \frac{x}{1 - \frac{x^2 \cdot f_{5/2}(x)}{4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot f_{3/2}(x)}} = \frac{x}{1 - \frac{x^2 f_{5/2}(x)}{1\cdot 3\cdot f_{3/2}(x)}} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3\left(1 - \frac{x^2 \cdot f_{7/2}(x)}{3\cdot 5\cdot f_{5/2}(x)}\right)}} =$$

$$= \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2 f_{7/2}(x)}{5\cdot f_{5/2}(x)}}} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5\cdot\left(1 - \frac{x^2 f_{9/2}(x)}{5\cdot 7\cdot f_{7/2}(x)}\right)}}} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2 f_{9/2}(x)}{7\cdot f_{7/2}(x)}}}} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7\cdot(1 - \ldots)}}}},$$

co wyraźnie sugeruje prawdziwość wzoru

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7\cdot(1-\ldots)}}}} = \frac{x}{1 - \frac{\frac{x^2}{1\cdot 3}}{1 - \frac{\frac{x^2}{3\cdot 5}}{1 - \frac{\frac{x^2}{5\cdot 7}}{1 - \ldots}}}}. \tag{U3}$$

Prawie wszystko zostało udowodnione poza zbieżnością ciągu, którego kolejnymi wyrazami są liczby x, $\frac{x}{1-\frac{x^2}{3}}$, $\frac{x}{1-\frac{x^2}{3-\frac{x^2}{5}}}$, $\frac{x}{1-\frac{x^2}{3-\frac{x^2}{5-\frac{x^2}{7}}}}$, …, do liczby $\operatorname{tg} x$. Zachodzą oczywiste równości $\frac{x}{1-\frac{x^2}{3}} = \frac{x}{1-\frac{x^2}{1\cdot 3}}$, $\frac{x}{1-\frac{x^2}{3-\frac{x^2}{5}}} = \frac{x}{1-\frac{\frac{x^2}{1\cdot 3}}{1-\frac{x^2}{3\cdot 5}}}$, $\frac{x}{1-\frac{x^2}{3-\frac{x^2}{5-\frac{x^2}{7}}}} = \frac{x}{1-\frac{\frac{x^2}{1\cdot 3}}{1-\frac{\frac{x^2}{3\cdot 5}}{1-\frac{x^2}{5\cdot 7}}}}$. zatem możemy zajmować się ciągiem lewych lub prawych stron tych równości.

Niech $R_0(x) = x$, $R_1(x)) = \frac{x}{1-\frac{x^2}{1\cdot 3}}$, $R_2(x) = \frac{x}{1-\frac{\frac{x^2}{1\cdot 3}}{1-\frac{x^2}{3\cdot 5}}}$, $R_3(x) = \frac{x}{1-\frac{\frac{x^2}{1\cdot 3}}{1-\frac{\frac{x^2}{3\cdot 5}}{1-\frac{x^2}{5\cdot 7}}}}$, … Udowodnimy, że dla każdej liczby zespolonej x zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \operatorname{tg} x$.

Skorzystamy z następującego lematu (znów zadanie).

Lemat 3.
Jeśli $|b_i| \le \frac{1}{4}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ oraz $|b_n| \le \frac{1}{2}$, to $\left|\frac{b_1}{1+\frac{b_2}{1+\frac{b_3}{1+\ddots{}_{1+\frac{b_{n-1}}{1+b_n}}}}}\right| \le \frac{1}{2}$. ■

Jego dowód to banalna indukcja, więc go opuszczam. I jeszcze jeden fakcik, który się przyda.

Lemat 4.
Jeśli $|b_i| \le \frac{1}{4}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $|\delta| \le \frac{1}{4}$, to

$$\left| \frac{b_1}{1+\frac{b_2}{1+\frac{b_3}{1+\ddots_{1+\frac{b_{n-1}}{1+b_n}}}}} - \frac{b_1}{1+\frac{b_2}{1+\frac{b_3}{1+\ddots_{1+\frac{b_{n-1}}{1+b_n+\delta}}}}} \right| \le |\delta| \,. \blacksquare$$

Znów opuszczam dowód indukcyjny lematu, choć to całkiem niezłe zadanie dla średnich studentów. W dalszym ciągu będziemy oznaczać ułamek $\frac{b_1}{1+\frac{b_2}{1+\frac{b_3}{1+\ddots_{1+\frac{b_{n-1}}{1+b_n}}}}}$ symbolem $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$.

Z udowodnionego wcześniej wzoru (U2) wynika następująca równość

$$\frac{f_{n+(3/2)}(x)}{f_{n+(1/2)}(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4(n+(1/2))(n+(3/2))} \cdot \frac{f_{n+(5/2)}(x)}{f_{n+(3/2)}(x)}} \,.$$

Z lematu 1 wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n+(3/2)}(x)}{f_{n+(1/2)}(x)} = 1$. Istnieje więc taka liczba naturalna N, że jeśli $n \ge N$, to $\left| \frac{f_{n+(3/2)}(x)}{f_{n+(1/2)}(x)} - 1 \right| < 1$ oraz $\frac{|x|^2}{(2n-1)(2n+1)} \le \frac{1}{4}$.

Niech $P_n = \left[-\frac{x^2}{(2N+1)(2N+3)}, -\frac{x^2}{(2N+3)(2N+5)}, \ldots, -\frac{x^2}{(2n-1)(2n+1)} \right]$ oraz

$Q_n = \left[-\frac{x^2}{(2N+1)(2N+3)}, -\frac{x^2}{(2N+3)(2N+5)}, \ldots, -\frac{x^2}{(2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{f_{n+(3/2)}(x)}{f_{n+(1/2)}(x)} \right]$,

$F_N(y) = \left[x, -\frac{x^2}{1\cdot 3}, -\frac{x^2}{3\cdot 5}, -\frac{x^2}{(2N-1)(2N+1)}, y \right]$.

Funkcja F_N zmiennej y jest homografią, więc jest homeomorfizmem płaszczyzny domkniętej $\overline{\mathbb{C}}$ na siebie. Jasne jest, że $\mathrm{tg}(x) = F_N(Q_n)$ dla każdego $n > N$. Z lematu 2 wynika, że $|P_n - Q_n| \le \left| \frac{f_{n+(3/2)}(x)}{f_{n+(1/2)}(x)} - 1 \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, a stąd wynika, że

$$|R_n(x) - \mathrm{tg}\, x| = |F_N(P_n) - F_N(Q_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \,.$$

Zakończyliśmy dowód wzoru (U3). $\blacksquare$

Zadanie 1.10 Udowodnić, że jeśli funkcja w jest wielomianem n–tego stopnia, o współczynnikach całkowitych, $n \ge 1$, a x_0 jego niewymiernym pierwiastkiem, to istnieje taka stała $C > 0$, że dla dowolnych liczb całkowitych p, q zachodzi nierówność $|x_0 - \frac{p}{q}| \ge \frac{C}{q^n}$.

To jest twierdzenie Liouville'a. jego dowód jest łatwy, nadaje się na zadanie. Inną kwestią jest wymyślenie twierdzenia ... $\blacksquare$

Zadanie 1.11 Udowodnić, że suma szeregu $\sum 10^{-n!}$ jest liczbą przestępną, więc nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu niezerowego o współczynnikach całkowitych. $\blacksquare$