„Nowe treści” w podstawie programowej, poziomie rozszerzonym czyli granice ciągów, granice funkcji w różnych zadaniach

Pewien czas temu usunięto granice z programów szkolnych po stosunkowo długim okresie nauczania. Jest sporo powodów, dla których o granicach w szkołach należy opowiadać przynajmniej tym uczniom, którzy chcą nauczyć się trochę matematyki. Temat jednak jest trudny. Definicja granicy jest zdaniem wielokrotnie złożonym, więc dla zdecydowanej większości ludzi niezrozumiałym. To sugeruje, że temat powinien być odłożony do studiów. Nie jest jednak naszym celem rozważanie kwestii: uczyć tego w szkołach, czy nie. Omówimy teraz kilka zagadnień nieuchronnie prowadzących do znajdowania granic.

Przykład 1. Jeśli np. chcemy zdefiniować pole koła, to można rozważać np. wielokąty foremne wpisane w to koło o coraz większej liczbie boków i mówić, że pole koła jest liczbą, którą można przybliżać polami tych wielokątów, przy czym przybliżenie jest tym dokładniejsze im większa jest liczba boków wielokąta. Mamy tu więc do czynienia z ciągiem pól wielokątów wpisanych w dane koło, co oznacza, że liczbom naturalnym począwszy od 3 przypisane zostały pewne liczby rzeczywiste. Te ostatnie nazywamy wyrazami ciągu i oznaczamy na ogół symbolem a_n. Niby jest jasne, że pole koła musi być iloczynem pola koła o promieniu 1 i liczby r^2 — to znany wzór $P = \pi r^2$. Jednak powstaje pytanie: dlaczego wtedy długość okręgu p ma być równa $2\pi r$, a nie np. $2{,}1\pi r$ lub $6{,}283r$. Wyjaśnienie po opanowaniu podstawowych własności granic jest proste: jeśli $\tilde{P}$ oznacza pole wielokąta opisanego na okręgu o promieniu r, a $\tilde{p}$ — jego obwód, to zachodzi równość $\tilde{P} = \frac{1}{2}\tilde{p}r$, w szkole omawiana z pewnością dla trójkąta, ale prawdziwa z tym samym uzasadnieniem dla każdego wielokąta. Niech P_n oznacza pole n–kąta foremnego opisanego na okręgu o promieniu $r > 0$, p_n — jego obwód. Wtedy $P_n = \frac{1}{2}p_n r$. „Oczywiście” $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$, zatem $P = \frac{1}{2}pr$, więc $\pi r^2 = \frac{1}{2}pr$, a stąd już wynika, że $p = 2\pi r$. To wiedziano już w starożytności. Ja dowiedziałem się tego w szkole podstawowej od swego nauczyciela matematyki. Oczywiście o żadnych granicach nic nie mówił, ale mówił, że pola n–kątów foremnych przybliżają pole koła, a obwody tychże wielokątów — długość okręgu. ■

Podobnie do rozpatrywania granic ciągów prowadzą wyprowadzenia wzorów na objętość ostrosłupa i uniknąć przejścia granicznego nie da się (tw. Dehna — trzeci problem Hilberta), objętość kuli, pole powierzchni kuli. Nie wymaga przejść granicznych wyprowadzenie wzoru na pole wielokąta. Te wzory oraz wzór na pole ograniczone przez parabolę i jej cięciwę znał już Archimedes (287 pne — 212 pne). Po nim nastąpił zastój w tej dziedzinie do czasów J. Keplera (1571 — 1630).

Przykład 2. Inny zagadnienie rozważał przez Zenona (490-430 p.n.e) z Elei . Twierdził on mianowicie, że znany w starożytności szybkobiegacz Achilles nie jest w stanie dogonić żółwia. Rozważania te przedstawimy oczywiście używając współczesnego języka i stosując współczesne oznaczenia. Przyjmijmy na przykład, że początkowa odległość między Achillesem i żółwiem równa jest 100 m. Dla prostoty przyjmiemy, że prędkość Achillesa jest dziesięciokrotnie większa niż prędkość uciekającego żółwia. W jakimś czasie Achilles przebiegnie 100 m. W tym samym czasie żółw przesunie się o 10 m, więc na razie przynajmniej nie zostanie złapany. Po $\frac{1}{10}$ tego czasu Achilles przebiegnie 10 m, jednak znów nie dogoni żółwia, który oddali się o następny metr. Achilles przebiegnie metr, a żółw oddali się o 10 cm itd. Proces ten można kontynuować. Prowadzi to do rozpatrywania coraz dłuższych odcinków przebytych przez Achillesa, czyli liczb:

$$100\,; \qquad 110\,; \qquad 111\,; \qquad 111,1\,; \qquad 111,11\,; \qquad 111,111\,; \ldots$$

– czyli ciągu, którego n–ty wyraz jest równy $a_n = 100 + 10 + 1 + \cdots + \dfrac{100}{10^{n-1}} = 111{,}1\ldots1$ – przy czym w zapisie dziesiętnym tej liczby występuje n jedynek. Zenon po prostu nie potrafił zsumować nieskończenie wielu składników. Nie operował pojęciem *sumy nieskończonej*, nie umiano wtedy takiego pojęcia zdefiniować. Tego rodzaju problemy analizowano już wtedy, ale ścisłe definicje matematyczne pojawiły się dopiero w pierwszej połowie XIX wieku (Gauss, Cauchy, Bolzano, Weierstrass). Oczywiście można łatwo odpowiedzieć na pytanie po przebiegnięciu jakiego dystansu Achilles złapie żółwia: $111,1\cdots = \frac{1000}{9}$. Na wszelki wypadek podamy formalne rozumowanie, które można było zastosować również w starożytności, jednak bez jawnego użycia pojęcia sumy nieskończonej, a więc omijając istotny problem matematyczno-filozoficzny.[1] Oznaczmy dystans przebyty przez żółwia do momentu zakończenia pogoni przez x. Achilles w tym samym czasie przebiegł odległość $10x$. Różnica tych wielkości to $9x = 100$. Stąd natychmiast wynika, że $x = \frac{100}{9}$, zatem $10x = \frac{1000}{9}$. Oczywiście problemem istotnym było tu obliczenie tzw. granicy ciągu, czym zajmiemy się niebawem. Widzimy, że daje się ukryć przejście graniczne prawie całkowicie. ■

Przykład 3. Załóżmy, że mamy do czynienia z pewną ilością pierwiastka promieniotwórczego. Niech m oznacza jego masę. Fizycy twierdzą, że ubytek masy pierwiastka promieniotwórczego jest proporcjonalny do czasu i masy substancji. Oznaczmy współczynnik proporcjonalności przez μ i zastanówmy się jaką ilość tego pierwiastka będziemy mieć po czasie t. Na tzw. „zdrowy rozum" masa w czasie t powinna się zmniejszyć o $\mu \cdot t \cdot m$, więc byłaby równa

$$m - \mu \cdot t \cdot m = m(1 - \mu \cdot t).$$

Jednak substancja promieniuje bez przerwy. Moglibyśmy więc rozumować w ten sam sposób myśląc o czasie dwukrotnie krótszym, czyli $\frac{t}{2}$. Wtedy masa zmniejszyłaby się o $\mu \cdot \frac{t}{2} \cdot m$. Wobec tego po czasie $\frac{t}{2}$ masa byłaby równa $m - \mu \cdot \frac{t}{2} \cdot m = m\big(1 - \mu \cdot \frac{t}{2}\big)$. Ta masa zmniejszałaby się w dalszym ciągu zgodnie z tym samym prawem, więc po czasie $\frac{t}{2}$ masa pierwiastka byłaby równa

$$m\big(1 - \mu \cdot \frac{t}{2}\big) - \mu \cdot \frac{t}{2} m\big(1 - \mu \cdot \frac{t}{2}\big) = m\big(1 - \mu \cdot \frac{t}{2}\big)^2 = m\left(1 - \mu \cdot t + \frac{\mu t^2}{4}\right).$$

Mamy więc dwa różne wyniki $\big(1 - \mu \cdot \frac{t}{2}\big)^2 m$, jeśli czas „dzielimy " na pół oraz $\big(1 - \mu \cdot t\big)m$, jeśli „nie dzielimy". Te wyniki są różne, więc podany opis nie może być dobry. Na domiar złego, jeśli czas podzielimy nie na dwie równe części, to wynik będzie jeszcze inny: przy podziale $t = \frac{t}{3} + \frac{t}{3} + \frac{t}{3}$ wywnioskujemy, że po czasie t masa równa jest $m\big(1 - \mu \cdot \frac{t}{4}\big)^3$, przy podziale $t = \frac{t}{4} + \frac{t}{4} + \frac{t}{4} + \frac{t}{4}$ wynik to $m\big(1 - \mu \cdot \frac{t}{4}\big)^4$. Oczywiście rezultat nie może zależeć od tego, w jaki sposób opisujemy zjawisko. Można więc przypuścić, że zacytowane prawo fizyki działa w przypadku dostatecznie krótkiego

[1] Były inne paradoksy związane z problemem dzielenia w nieskończoność na części, np. punkt nie ma długości, odcinek składa się z punktów i ma długość, poruszający się obiekt w nieskończenie krótkim czasie nie przebywa żadnej odległości, a jednak się porusza. Przekonamy się, że dzięki pojęciu granicy daje się w sensowny sposób mówić o tego rodzaju kwestiach nie dochodząc do pozornych sprzeczności.

czasu z błędem mniejszym niż dokładność pomiaru. Matematyka obliguje to do zadania pytania: czy kolejne liczby $m\big(1-\mu\cdot t\big)$, $m\big(1-\mu\cdot\frac{t}{2}\big)^2$, $m\big(1-\mu\cdot\frac{t}{3}\big)^3$, $m\big(1-\mu\cdot\frac{t}{4}\big)^4$, $\ldots$ przybliżają z coraz większą dokładnością pewną liczbę, która mogłaby być wtedy uważana za prawdziwy wynik? ■

Pytanie okazuje się tym ważniejsze, że do tego samego pytania prowadzi analiza oprocentowanego wkładu bankowego albo np. wydłużania się np. szyn kolejowych w wyniku wzrostu temperatury lub ich skracania się w wyniku spadku temperatury. To prawo fizyczne jest znane każdemu, kto był przytomny w czasie lekcji fizyki w szkole podstawowej lub gimnazjum. Jednak nieliczni uczniowie zauważają problem, który opisaliśmy wyżej. Stosowanie tego prawa w sposób opisany w podręcznikach szkolny prowadzi do różnych wyników w zależności od tego czy temperatura zmienia się np. o $20°$, czy też o $10° + 10°$, co oczywiście nie może być prawdą, bowiem wzrost temperatury nie jest skokowy, lecz odbywa się stopniowo. Podsumujmy: opisane wyżej zagadnienia prowadzą do rozpatrywania ciągu o wyrazie $(1+\frac{x}{n})^n$, w przypadku masy substancji promieniotwórczej $x=-\mu\cdot t$. Powyższe rozważania sugerują, że wzrost liczby naturalnej n powinien powodować wzrost wyrażenia $(1+\frac{x}{n})^n$ przynajmniej w przypadku $x\neq 0$. W istocie rzeczy łatwo można się przekonać o tym, że $n>-x$ wzrost taki ma miejsce, wykażemy to niebawem. Najpierw jednak przypomnimy definicję granicy ciągu.

Definicja 4. (Granicy ciągu)

a. Liczba g nazywana jest granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon>0$ istnieje liczba całkowita n_ε, taka że jeśli $n>n_\varepsilon$, to $|a_n-g|<\varepsilon$.

b. $+\infty$ (czytaj: plus nieskończoność) jest granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje liczba całkowita n_m taka, że jeśli $n>n_M$, to $a_n>M$.

c. $-\infty$ (czytaj: minus nieskończoność) jest granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje liczba całkowita n_m taka, że jeśli $n>n_M$, to $a_n<M$.

— Jeśli g jest granicą ciągu (a_n), skończoną lub nie, to piszemy $g=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ lub $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}g$. Można też pisać $a_n\to g$, gdy $n\to\infty$ lub krótko $a_n\to g$. Mówimy, że ciąg jest zbieżny, jeśli jego granica jest skończona. ■

Skomentujemy po pierwsze część **a**. Chodzi tam o to, że wyrazy ciągu, których numery są dostatecznie duże ($n>n_\varepsilon$) przybliżają granicę g z dopuszczalną dokładnością ($|a_n-g|<\varepsilon$). Stwierdzimy tu wyraźnie, że przejście do następnego wyrazu nie musi zwiększyć dokładności przybliżenia, przeciwnie chwilowo może się ta dokładność zmniejszyć, dopiero *dostatecznie duży* wzrost numeru wyrazu musi zwiększyć dokładność przybliżenia (jeśli ciąg jest stały, np. $a_n=33$ dla każdej liczby naturalnej n, to błąd jest zerowy zawsze, niezależnie od numeru wyrazu, więc dokładność nie może być poprawiona). O liczbie ε myśleć należy jako o małej liczbie dodatniej (chodzi o to, że jeśli dla małego ε umiemy wskazać moment, od którego błąd jest mniejszy niż ε, to od tego momentu nierówność jest również spełniona z większym ε). Pamiętajmy również o tym, że liczba $|x-y|$ może być traktowana jako odległość dwóch punktów prostej. Wobec tego nierówność $|a_n-g|<\varepsilon$ oznacza, że punkt a_n znajduje się w przedziale o długości 2ε i środku g. W szczególności ciąg, którego wszystkie wyrazy są takie same (lub nawet nie wszystkie, tylko wszystkie od pewnego momentu, tj. dla dostatecznie dużych n są identyczne), jest zbieżny, przy czym granicą takiego ciągu jest wspólna wartość jego wyrazów.

Często zamiast mówić *istnieje* n_ε*, takie że dla* $n > n_\varepsilon$ *zachodzi ...* będziemy mówić, że *dla dostatecznie dużych n zachodzi ...* lub że *dla prawie wszystkich n zachodzi ....* Tak więc *dla prawie wszystkich n ...* oznacza *dla wszystkich , z wyjątkiem skończenie wielu n ....*

Podobnie można interpretować część **b** definicji granicy. Tym razem wyraz ciągu, którego numer jest dostatecznie duży ($n > n_M$) powinien być *blisko* plus nieskończoności, więc ma być dużą liczbą dodatnią ($a_n > M$). Interpretację części **c** pozostawiamy czytelnikom – jest ona w pełni analogiczna do części **b**. Niektórzy autorzy używają terminu „ciąg jest rozbieżny do $+\infty$”, a inni mówią, że „ciąg jest zbieżny do $+\infty$”. My będziemy stosować raczej pierwszą terminologię.

Przykład 5. $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$. Aby przekonać się o prawdziwości tej tezy wystarczy przyjąć, że n_ε jest dowolną liczbą całkowitą większą niż $\frac{1}{\varepsilon}$. *Można* więc przyjąć np. $n_1 = 2$, $n_{1/2} = 3$, $n_{0{,}41} = 3$, ale można też powiększyć niektóre z tych liczb lub nawet wszystkie i przyjąć $n_1 = 10$, $n_{1/2} = 207$, $n_{0{,}41} = 3$. Mamy więc możliwość wyboru: liczbę n_ε można zawsze zastąpić większą. ■

Przykład 6. $\frac{1}{2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{4n-1}$. Wykażemy, że wzór ten jest prawdziwy. Bez trudu stwierdzamy, że nierówność $\left|\frac{1}{2} - \frac{2n+3}{4n-1}\right| = \left|\frac{-7}{2(4n-1)}\right| \le \frac{7}{6n}$ zachodzi dla dowolnej liczby całkowitej $n \ge 1$. **Wystarczy** więc, by $n_\varepsilon > \frac{7}{6\varepsilon}$. To zdanie oznacza , że dla tak dobranego n_ε i $n > n_\varepsilon$ prawdziwa jest nierówność $\left|\frac{1}{2} - \frac{2n+3}{4n-1}\right| < \varepsilon$ — nie znaczy to jednak, że *tylko* dla tych liczb całkowitych n nierówność ta ma miejsce! Nie musieliśmy rozwiązywać nierówności, choć w tym przypadku było to możliwe — wystarczyło udowodnić, że nierówność ma miejsce dla *wszystkich dostatecznie dużych* liczb naturalnych n. ■

Przykład 7. Jeśli $d > 0$, to $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty}(a_0 + nd)$. Postaramy się wykazać, że równość ta ma miejsce. Jeśli M jest dowolną liczbą rzeczywistą, $n_\varepsilon > \frac{M-a_0}{d}$ i $n > n_\varepsilon$, to $n > \frac{M-a_0}{d}$, zatem $a_n = a_0 + nd > M$, co dowodzi prawdziwości równości, którą dowodzimy. ■

Zadanie 1. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2-17n+1} = 0$.

Rozwiązanie. Niech $\varepsilon > 0$. Chcemy wykazać, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\left|\frac{2n+1}{n^2-17n+1} - 0\right| < \varepsilon$. Nierówność można rozwiązać, ale nie ma konieczności. Dla $n \ge 17$ zachodzi nierówność $n^2 - 17n + 1 \ge 1 > 0$, więc od pewnego miejsca wyrazu ciągu są dodatnie. W dalszym ciąg zakładamy, że $n \ge 170$. Możemy wyraz ciągu powiększyć, ale nie zmieniając w istotny sposób jego wielkości. Mamy
$n^2 - 17n + 1 = \frac{9}{10}n^2 + \frac{1}{10}n^2 - 17n + 1 \ge \frac{9}{10}n^2 + \frac{1}{10}\cdot 170n - 17n + 1 > \frac{9}{10}n^2$, zatem

$$\left|\frac{2n+1}{n^2-17n+1} - 0\right| = \frac{2n+1}{n^2-17n+1} < \frac{3n}{0{,}9n^2} = \frac{10}{3n} < \frac{4}{n}.$$

Wystarczy więc, aby $\frac{4}{n} < \varepsilon$, czyli by $\frac{4}{\varepsilon} < n$. Wystarczy więc, aby n_ε byłą jakąkolwiek liczbą naturalną większą od $\frac{4}{\varepsilon}$. ■

Zadanie 2. *(Nierówność Bernoulliego)* Dowieść, że jeśli $a > -1$ i $n \in \mathbb{N}$, to $(1+a)^n \geq 1+na$ przy czym jeśli $n > 1$ i $a \neq 0$, to nierówność jest ostra.

Rozwiązanie Dla $n = 1$ zachodzi równość niezależnie od a. Mamy

$$(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 \geq 1 + 2a,$$

przy czym dla $a \neq 0$ otrzymana nierówność jest ostra. Ponieważ $1 + a > 0$, więc z nierówności $(1 + a)^2 \geq 1 + 2a$ wynika, że

$$(1+a)^3 = (1+a)^2(1+a) \geq (1+2a)(1+a) = 1 + 3a + 2a^2 \geq 1 + 3a,$$

przy czym znów równość zachodzi jedynie, gdy $a = 0$. Jeśli dla pewnych $a > -1$ i $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $(1 + a)^n \geq 1 + na$, to po pomnożeniu jej przez liczbę $1 + a > 0$ otrzymujemy

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a,$$

przy czym równość zachodzi jedynie wtedy, gdy $a = 0$. Z zasady indukcji wynika więc, że nierówność prawdziwa jest zawsze wtedy, gdy $a > -1$ i $n \in \mathbb{N}$. ■

Oczywiście sprawdzenie dla $n = 2$ i dla $n = 3$ jest zbędne jako zawarte w kroku indukcyjnym. Jednak mówiąc o tej nierówności do osób wystraszonych terminem indukcja matematyczna można ominąć tę zbitkę słowną, a w każdym razie opóźnić jej pojawienie się. Zwykle daje to niezłe rezultaty, tzn. mniej osób wyłącza się we wstępnej części dowodu.

Przykład 8. Zajmiemy się ciągiem geometrycznym: $a_n = aq^n$, gdzie a i q są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Liczba q jest zwana ilorazem ciągu geometrycznego, bo w przypadku $q \neq 0$ jest równa ilorazowi dwóch kolejnych wyrazów ciągu. Do rozpatrywania tego ciągu prowadzą opisane poprzednio zagadnienia, jeśli nie zmniejszamy odcinków czasu lub temperatury Liczba ludzi w danym kraju w przypadku stałego przyrostu naturalnego zachowuje się jak ciąg geometryczny o ilorazie dosyć bliskim jedności — dodatni przyrost naturalny oznacza, że iloraz jest większy niż 1 zaś ujemny przyrost naturalny — że iloraz jest mniejszy niż 1.

Udowodnimy, że jeśli $|q| < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Jest to prawdą, gdy $q = 0$ lub $a = 0$, bo wtedy wszystkie wyrazy ciągu są równe 0. Załóżmy, że $0 < |q| < 1$ i $a \neq 0$ oraz $\varepsilon > 0$. Wtedy nierówność $|aq^n - 0| < \varepsilon$ jest równoważna nierówności $\left(\frac{1}{|q|}\right)^n > \frac{|a|}{\varepsilon}$. Z nierówności $0 < |q| < 1$ wynika, że $\frac{1}{|q|} = 1 + \left(\frac{1}{|q|} - 1\right)$, zatem $\frac{1}{|q|} > 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)$ (nierówność Bernoulliego). **Wystarczy** zatem, aby zachodziła nierówność $1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right) > \frac{|a|}{\varepsilon}$, czyli

$$n > \frac{\frac{|a|}{\varepsilon} - 1}{\frac{1}{|q|} - 1}.$$

Można przyjąć, że n_ε to dowolna liczba całkowita większa od liczby $\left(\frac{|a|}{\varepsilon} - 1\right)\big/\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)$. Dowód został zakończony. ■

Czytelnik zechce zwrócić uwagę na to, że nie znaleźliśmy wszystkich n, dla których zachodzi nierówność $|a_0q^n - 0| < \varepsilon$, a jedynie wskazaliśmy moment, od którego ona zachodzi. W tym konkretnym wypadku mogliśmy nierówność $|a_0q^n - 0| < \varepsilon$ rozwiązać pisząc $n > \frac{\log(\varepsilon/a_0)}{\log|q|}$, ale nie chcieliśmy straszyć uczniów logarytmami tym bardziej, że $\log|q| < 0$ (bo podstawa jest większa od 1 w przeciwieństwie do liczby logarytmowanej). Na ogół łatwiej można wskazać moment, od którego potrzebna nam nierówność zachodzi niż rozwiązać nierówność.

Przykład 9. Udowodnimy, że jeśli $q > 1$ i $a > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = +\infty$. Niech $q = 1 + r$. Oczywiście $r > 0$. Wobec tego $aq^n > a(1 + nr) > M$ dla każdego $n > (\frac{M}{a} - 1) \cdot \frac{1}{r}$. Wystarczy więc przyjąć, że n_M to dowolna liczba naturalna większa od $(\frac{M}{a} - 1) \cdot \frac{1}{r}$. ■

Przykład 10. Udowodnimy, że jeśli $q \leq -1$ i $a \neq 0$, to ciąg o wyrazie aq^n nie ma granicy. Dla ustalenia uwagi przyjmiemy, że $a > 0$. Wtedy dla nieparzystych n zachodzi nierówność $aq^n < 0$, więc nie może zachodzić równość $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = g \in \mathbb{R}$. Wtedy istnieje taka liczba naturalna m, że jeśli $n > m$, to $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = +\infty$. Podobnie dla parzystych n zachodzi nierówność $aq^n > 0$, która wyklucza równość $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = -\infty$. Pozostaje trzecia możliwość: $|aq^n - g| < |a|$, więc również $|aq^{n+1} - g| < |a|$. Stąd wnioskujemy, że $|aq^n - aq^{n+1}| \leq |aq^n - g| + |g - aq^{n+1}| < 2|a|$, co jednak nie jest możliwe, bo liczby aq^n oraz aq^{n+1} leżą po różnych stronach przedziału $(-a, a)$, więc ich odległość nie jest mniejsza od $2a$. ■

Na przełomie XVIII i XIX wieku zaobserwowano, że ilość zboża zachowuje się jak wyraz ciągu arytmetycznego (n jest numerem roku). W 1798 r. wydana została w Anglii książka Thomasa Roberta Malthusa *An Essay on the Principle of Population.* A jaki wniosek wysnuto z tych obserwacji? Otóż liczba ludności rośnie w zasadzie jak ciąg geometryczny o ilorazie nieco większym od 1. Wobec tego ilość zboża przydająca na jedną osobę zachowuje się jak wyraz ciągu o wyrazie $c\frac{n}{q^n}$, gdzie $c > 0$ i $q > 1$ są pewnymi stałymi.

Zadanie 3. Udowodnić, że dla każdej pary liczby $c > 0$, $q > 1$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{cn}{q^n} = 0$.

Rozwiązanie. Trzeba udowodnić, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ dla wszystkich dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność $\left|\frac{cn}{q^n} - 0\right| < \varepsilon$, czyli $\frac{cn}{q^n} < \varepsilon$, tzn. $\frac{cn}{\varepsilon} < q^n$. Niech $\sqrt{q} = 1 + r$. Oczywiście $r > 0$. Mamy $q^n = \big((1 + r)^n\big)^2 > (1 + nr)^2 > n^2r^2$ — skorzystaliśmy z nierówności Bernoulliego. Wystarczy więc, aby $n^2r^2 > \frac{cn}{\varepsilon}$, czyli by $n > \frac{c}{\varepsilon r^2}$. Zadanie zostało rozwiązane.

Wniosek musi być taki: ilość żywności przypadająca na jedną osobę będzie maleć. Oczywiście tego rodzaju obserwacje są przybliżone, bowiem co jakiś czas zdarzają się powodzie, susze i wtedy proces wzrostu ulega zakłóceniu. To jednak w długim okresie czasu nie ma większego znaczenia. Bywają też zakłócenia innego rodzaju, np. w XIX zauważono, że stosowanie saletry chilijskiej (nawozy azotowe) zwiększa w istotny sposób plony. Były też inne zakłócenia „naturalnego" tempa wzrostu ilości zbóż. Głównie zmiany w rolnictwie powodujące zwiększenie ilość zboża uzyskiwanego np. z 1 ha pola spowodowały, że przewidywania T. R. Malthusa nie sprawdzają się.

Przykład 11. Po takich opowiadaniach warto zapytać młodzież np. o granicę ciągu o wyrazie $\frac{n^{100}}{1{,}01^n}$. Aby zwiększyć szanse na „sukces dydaktyczny" warto zachęcić nastolatków do użycia sprzętu elektronicznego. Niech obliczą ze trzy wyrazy ciągu, może nawet cztery. Otrzymają kolejno następujące liczby: $\frac{1}{1{,}01}$, $\frac{2^{100}}{1{,}0201} = \frac{1\,267\,650\,600\,228\,229\,401\,496\,703\,205\,376}{1{,}0201}$, $\frac{3^{100}}{1{,}01^3} = \frac{515377\,520732\,011331\,036461\,129765\,621272\,702107\,522001}{1{,}030301}$. Jest wysoce prawdopodobne, że po tym eksperymencie numerycznym będą bardzo głęboko przekonani, że ciąg jest ściśle rosnący oraz że jego granicą jest $+\infty$ — widać przecież wyraźnie, co się dzieje. Jest tylko jeden drobny problem.

To nieprawda! Wręcz kompletny nonsens. Mamy bowiem
$$\tfrac{(n+1)^{100}}{1{,}01^{n+1}} \div \tfrac{n^{100}}{1{,}01^{n}} = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{100}\cdot\tfrac{1}{1{,}01} < 1$$
dla dostatecznie dużych n, bo $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{100} = 1$. Dla $n > 20\,000$ mamy

$$\frac{1}{1{,}01}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{100} = \frac{100}{101}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{n+1})^{100}} < \frac{100}{101}\cdot\frac{1}{1-\frac{100}{n+1}} < \frac{100}{101}\cdot\frac{1}{1-\frac{100}{20\,000}} = \frac{20\,000}{20\,099} < 1\,.$$

Wykazaliśmy, że dla $n > 20\,000$ iloraz wyrazu przez wyraz poprzedni jest mniejszy od stałej mniejszej od 1, zatem wtedy ciąg maleje nie wolniej niż ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{20\,000}{20\,099}$, więc mniejszym od 1. Wspaniale: po pierwsze maleje zamiast rosnąć jak na początku, a po drugie dąży do 0, a nie — do $+\infty$. ■

Przykład 12. Niech $s_n = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}$. Jeśli $q\neq 1$, to

$$s_n = \frac{(1-q)(1+q+\cdots+q^{n-1})}{1-q} = \frac{1+q+\cdots+q^{n-1}-q-q^2-\cdots-q^n}{1-q} = \frac{1-q^n}{1-q}\,.$$

Z tej równości wynika, że jeśli $|q|<1$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$. Otrzymaliśmy znany powszechnie (kiedyś?) wzór na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego. Pozwala on np. uprawomocnić szkolne zabawy prowadzące do zamiany nieskończonego, okresowego od pewnego miejsca ułamka dziesiętnego na ułamek zwykły. Robi się to jakoś tak: $123{,}4565656\ldots = 123{,}4+x = 123{,}4+100x-5{,}6 = 117{,}8+100x$, więc $99x = 123{,}4-117{,}8 = 5{,}6$, zatem $x = \frac{5{,}6}{99} = \frac{56}{990} = \frac{28}{495}$, więc $123{,}4565656\ldots = 123{,}4+\frac{28}{495} = 123+\frac{198+28}{495} = 123+\frac{198+28}{495} = = 123\frac{226}{495}$. Można tak $x = 1-1+1-1+\cdots = 1+(-1)x$, więc $2x=1$, zatem $x=\frac{1}{2}$? Wobec tego $\frac{1}{2} = 1-1+1-1+\cdots = (1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+\cdots = 0$. A może tak $x = 1+2+4+8+\cdots = 1+2(1+2+4+8+\ldots) = 1+2x$, zatem $-x=1$, czyli $1+2+4+8+\cdots = -1$. Prawda, że wszystko jest w porządku? Trochę niedobrze to wygląda: suma nieskończenie wielu liczb dodatnich ma być równa -1? Problem leży w tym, że sumę nieskończoną należy zdefiniować, np jako granicę ciągu sum częściowych: $1+2+4+8+\cdots = \lim\limits_{n\to\infty}(1+2+\cdots+2^{n-1}) = +\infty$. Wtedy ostatnie wyprowadzenie wygląda tak: $\infty = 1+2+4+8+\cdots = 1+2(1+2+4+\ldots) = 1+2\infty$, zatem $-1 = 2\infty-\infty = \infty-\infty$. I wszystko się załamuje, bo to odejmowanie zdefiniowane nie jest (niżej więcej o tym problemie). Podobnie jest z sumą $1-1+1-1+1-1+\ldots$, która nie jest zdefiniowana, a nieco wcześniej w przekształceniach traktowaliśmy tę nieistniejącą sumę jak liczbę rzeczywistą. ■

Po tych kilku przykładach sformułujmy

Twierdzenie 13. (o arytmetycznych własnościach granicy)

A1. Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i określona jest ich suma, to istnieje też granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ i zachodzi wzór: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

A2. Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i określona jest ich różnica, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ i zachodzi: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

A3. Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i określony jest ich iloczyn, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$ i zachodzi: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

A4. Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i określony jest ich iloraz, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ i zachodzi wzór $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$. ■

Komentarza wymagają stwierdzenia „jeśli istnieje ...". Otóż granice bywają nieskończone. Należy więc powiedzieć, co ma oznaczać np. $\infty+\infty$, albo $\frac{\infty}{\infty}$ itd. Są jednak kłopoty. Nie wszystkie działania można zdefiniować sensownie.

Definicja 14. (działań z użyciem $\pm\infty$)
$-(+\infty) = -\infty$, $+(+\infty) = +\infty$, $-(-\infty) = +\infty$, $+(-\infty) = -\infty$.
$+\infty \pm a = \pm a + (+\infty) = +\infty$ $-\infty \pm a = \pm a + (-\infty) = -\infty$ dla każdej liczby rzeczywistej a.
$+\infty + (+\infty) = +\infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$, $+\infty - (-\infty) = +\infty$, $-\infty - (+\infty) = -\infty$.
$+\infty \cdot a = +\infty$ i $-\infty \cdot a = -\infty$ dla każdego $a > 0$.
$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$.
$+\infty \cdot a = -\infty$ i $-\infty \cdot a = +\infty$ dla każdego $a < 0$.
$\frac{a}{\pm\infty} = 0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej a.
$\frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty \cdot \frac{1}{a}$ dla dowolnej liczby $a \neq 0$.
$a^{+\infty} = +\infty$, $a^{-\infty} = 0$ dla dowolnej liczby $a > 1$.
$\infty^{\infty} = \infty$, $\infty^{-\infty} = 0$.
$a^{+\infty} = 0$ i $a^{-\infty} = +\infty$ dla dowolnej liczby $0 < a < 1$.
$-\infty < a < +\infty$ dla dowolnej liczby rzeczywistej a.
$-\infty < +\infty$. ■

Innych działań nie definiujemy, bo chodzi o to, aby twierdzenie o arytmetycznych własnościach granicy było prawdziwe. Dlaczego nie definiujemy np. symbolu $\infty - \infty$. Z jednej strony powinno być to „z oczywistych powodów" równe 0. Niech $a_n = n$, $b_n = n-1$. Wtedy oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i jednocześnie $a_n - b_n = 1$ dla każdego n, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 1$. Więc nie 0 lecz 1 ? Ale zmieniając definicję drugiego z ciągów: $b'_n = n + 7$, $b''_n = 2n$ otrzymujemy $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b'_n) = -7$, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b''_n) = -\infty$. Bez trudu można uzyskać dowolną liczbę, ∞ oraz $-\infty$. Przyjmijmy wreszcie $\hat{b}_n = n + (-1)^n$. Wtedy $a_n - \hat{b}_n = -(-1)^n$, więc granica nie istnieje. Innymi słowy różnica dwóch ciągów, których granicą jest ∞ może być dowolną liczbą, może też być nieskończona, może też nie istnieć. **Oznacza to, że nie można zdefiniować sensownie symbolu $\infty - \infty$.**

Zadanie 4. Wykazać, że nie jest możliwe sensowne zdefiniowanie symbolu $\frac{\infty}{\infty}$, tzn. podać przykłady świadczące o tym, że granicą ilorazu ciągów, których granicą jest ∞ może być dowolna liczba rzeczywista, może być ∞, a może też zdarzyć się, że iloraz takich ciągów granicy nie ma.

Zadanie 5. Wykazać, że nie jest możliwe sensowne zdefiniowanie symbolu 0^0, tzn. podać przykłady świadczące o tym, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i $a_n > 0$ dla każdego n, to granicą ciągu $a_n^{b_n}$ może być dowolna liczba rzeczywista nieujemna, może być ∞, a może też zdarzyć się, że ciąg $a_n^{b_n}$ granicy nie ma.

Zadanie 6. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - 10n + 13)$.

Rozwiązanie. Mamy $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty\cdot\infty = \infty$, na mocy twierdzenia o granicy iloczynu. Chciałoby się napisać, że $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - 10n + 13) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 - 10\lim\limits_{n\to\infty} n + 13$, ale to nic nie daje, bo odejmowanie $\infty - \infty$ nie jest zdefiniowane. Jest jednak na to rada:
$\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - 10n + 13) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(1 - \frac{10}{n} + \frac{13}{n^2} = \infty^2\cdot(1 - 10\cdot 0 + 13\cdot 0^2) = \infty\cdot 1 = \infty.$ ■

Zadanie 7. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+10n+13}{5n^2-31n+7}$.

Rozwiązanie. Granicą licznika i mianownika jest ∞ (por. poprzednie zadanie), więc trzeba wyrażenie nieco przekształcić, by uniknąć niezdefiniowanego symbolu (nieoznaczoności). Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+10n+13}{5n^2-31n+7} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+10\cdot\frac{1}{n}+13\cdot\frac{1}{n^2}}{5-31\cdot\frac{1}{n}+7\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{1+10\cdot 0+13\cdot 0^2}{5-31\cdot 0+7\cdot 0^2} = \frac{1}{5}\,. \ ■$$

Dwa ostatnie zadania pokazują, najprostszą z najbardziej typowych metod obliczania granic.

Zadanie 8. Udowodnić, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b i dowolnej liczby naturalnej $m > 1$ zachodzi nierówność $\left|\sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{b}\right| \le \sqrt[m]{|a-b|}$, przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

Rozwiązanie. Dla $a = b$ zachodzi równość — obie strony są równe 0. Załóżmy, że $a > b$. Dowodzona nierówność jest równoważna takiej $\sqrt[m]{a} < \sqrt[m]{b} + \sqrt[m]{a-b}$, ta z kolei następującej $a < \left(\sqrt[m]{b} + \sqrt[m]{a-b}\right)^m$. Wykonując potęgowanie z prawej strony otrzymujemy

$$b + \text{suma wielu dodatnich składników} + a - b > b + a - b = a\,.$$

Zakończyliśmy dowód. Dodajmy jeszcze, że gdy m jest liczbą nieparzystą, teza jest prawdziwa bez założenia $a, b \ge 0$. ■

Zauważmy, że w ostatnio rozwiązanym zadaniu nie jest konieczna znajomość dwumianu Newtona, wystarczy umieć wymnażać sumy liczb rzeczywistych, więc wiedzieć, że mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Zadanie 9. Udowodnić, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ i $a_n \ge 0$ dla każdego n, to dla każdej liczby naturalnej $m > 1$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[m]{a_n} = 0$.

Rozwiązanie. Załóżmy, że $\varepsilon > 0$. Istnieje wtedy taka liczba naturalna k, że dla $n > k$ zachodzi nierówność $0 < a_m < \varepsilon^m$. Stąd wynika, że $\sqrt[m]{a_n} < \varepsilon$.
Dowód został zakończony. ■

Dodajmy jeszcze, że gdy m jest liczbą nieparzystą, teza wykazana w ostatnim zadaniu jest prawdziwa bez założenia $a \ge 0$.

Zadanie 10. Udowodnić, że jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $a_n \geq 0$ dla każdego n, to dla kazdej liczby naturalnej $m > 1$ zachodzi równość $\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a}$.

Rozwiązanie. Teza wynika z równoważności $\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$ i z poprzedniego zadania . ∎

Podobnie jak poprzednio dla nieparzystych liczb m twierdzenie zachodzi bez założenia $a, b \geq 0$.

Zadanie 11. Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\big(\sqrt{n+13} - \sqrt{n+7}\big)$.

Rozwiązanie. Mamy $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$, bo jeśli $n > M^2$, to $\sqrt{n} > M$. W taki sam sposób stwierdzamy, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+13} = \infty$ oraz $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+7} = \infty$. Wobec tego mamy do czynienia z sytuacją $\infty(\infty - \infty)$, więc musimy badane wyrażenie nieco przekształcić. Pierwszy problem to zawartość nawiasu. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \big(\sqrt{n+13} - \sqrt{n+7}\,\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+13-(n+7)}{\sqrt{n+13}+\sqrt{n+7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{\sqrt{n+13}+\sqrt{n+7}} = \frac{6}{\infty+\infty} = 0\,.$$

No to problem się „uprościł" — teraz mamy do czynienia z wyrażeniem $0\cdot\infty$, więc znów trzeba coś zrobić, bo twierdzenie o arytmetycznych własnościach granicy problemu automatycznie nie rozwiązuje. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\big(\sqrt{n+13} - \sqrt{n+7}\,\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{6\sqrt{n}}{\sqrt{n+13}+\sqrt{n+7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{\sqrt{1+\frac{13}{n}}+\sqrt{1+\frac{7}{n}}} = \frac{6}{1+1} = 3\,.$$

Zadanie 12. Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}\big(\sqrt[3]{n+13} - \sqrt[3]{n+7}\,\big)$.

Rozwiązanie. Skorzystamy z wzoru $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2$. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}\big(\sqrt[3]{n+13} - \sqrt[3]{n+7}\,\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}(n+13-(n+7))}{\sqrt[3]{(n+13)^2}+\sqrt[3]{n+13}\sqrt[3]{n+7}+\sqrt[3]{(n+7)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{(n+13)^2}+\sqrt[3]{n+13}\sqrt[3]{n+7}+\sqrt[3]{(n+7)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{(1+\frac{13}{n})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{13}{n}}\sqrt[3]{1+\frac{7}{n}}+\sqrt[3]{(1+\frac{7}{n})^2}\right)} = \frac{6}{\infty(1+1+1)} = 0\,. \blacksquare$$

Zadanie 13. Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2}\big(\sqrt[3]{n+13} - \sqrt[3]{n+7}\,\big)$.

Rozwiązanie. Postępujemy tak jak w poprzednim zadaniu (pomijając część przekształceń):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2}\big(\sqrt[3]{n+13} - \sqrt[3]{n+7}\,\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{6\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{(n+13)^2}+\sqrt[3]{n+13}\sqrt[3]{n+7}+\sqrt[3]{(n+7)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{\sqrt[3]{(1+\frac{13}{n})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{13}{n}}\sqrt[3]{1+\frac{7}{n}}+\sqrt[3]{(1+\frac{7}{n})^2}} = \frac{6}{1+1+1} = 2\,. \blacksquare$$

Zadanie 14. Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty} n\big(\sqrt[3]{n+13} - \sqrt[3]{n+7}\,\big)$.

Rozwiązanie. Postępujemy tak jak w poprzednim zadaniu:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{n+13}-\sqrt[3]{n+7}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{\sqrt[3]{(n+13)^2}+\sqrt[3]{n+13}\sqrt[3]{n+7}+\sqrt[3]{(n+7)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{(1+\frac{13}{n})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{13}{n}}\sqrt[3]{1+\frac{7}{n}}+\sqrt[3]{(1+\frac{7}{n})^2}}=\frac{6\cdot\infty}{1+1+1}=\infty\,.\ \blacksquare$$

Następne twierdzenie jest bardzo użyteczne.

Twierdzenie 15. (o szacowaniu)

N1. Jeśli $C<\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, to dla dostatecznie dużych numerów n zachodzi nierówność $C<a_n$.

N2. Jeśli $C>\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, to dla dostatecznie dużych numerów n zachodzi nierówność $C>a_n$.

N3. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} b_n<\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, to dla dostatecznie dużych numerów n zachodzi nierówność

$$b_n<a_n.$$

N4. Jeśli $b_n\le a_n$ dla dostatecznie dużych numerów n, to zachodzi nierówność

$$\lim_{n\to\infty} b_n\le\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Dowód. N1 i N2 wynikają bezpośrednio z definicji granicy. N3 wynika z N1 i N2 — wystarczy rozważyć dowolną liczbę $C\in\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n,\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$. N4 wynika z N3 — rozumujemy nie wprost. $\blacksquare$

Wniosek 16. (z twierdzenia o szacowaniu — jednoznaczność granicy)
Ciąg ma co najwyżej jedną granicę.

Dowód. Gdyby miał dwie np. $g_1<g_2$, to wybrać moglibyśmy liczbę $C\in(g_1,g_2)$. Wtedy dla dostatecznie dużych n byłoby jednocześnie $a_n<C$ (zob. N2) oraz $a_n>C$ (zob. N1), co oczywiście nie jest możliwe. $\blacksquare$

Wniosek 17. (z tw. o szacowaniu — ograniczoność ciągu o granicy skończonej)
Jeśli granica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jest skończona, to istnieją liczby rzeczywiste C,D takie, że dla **wszystkich** n zachodzi nierówność $C<a_n<D$, czyli ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu liczbą C zaś z góry liczbą D. $\blacksquare$

Twierdzenie 18. (o trzech ciągach)
Jeśli $a_n\le b_n\le c_n$ dla dostatecznie dużych n i ciągi (a_n) oraz (c_n) mają *równe* granice, to ciąg (b_n) też ma granicę i zachodzi wzór

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty} c_n.\quad\blacksquare$$

Natychmiastowy dowód tego twierdzenia opuszczamy.

Twierdzenie 19. (o granicy ciągu niemalejącego)
Jeśli ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ jest niemalejący, tzn, $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots$ i ograniczony z góry przez M, tzn. $a_n \le M$ dla $n = 1, 2, \ldots$, to ciąg (a_n) ma granicę skończoną, tzn, istnieje taka liczba g, że

$$g = \lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

Tego twierdzenia dowodzić nie będę. Dowód nie jest trudny, ale ono jest zbyt bliskie pewnikowi ciągłości, w dodatku jest mu równoważne. W szkole powinno być sformułowane, a dowód **należy** pominąć!

Przykład 20. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac12+\frac13+\cdots+\frac1n)=\infty$. To w zasadzie oczywiste.Mamy $1+\frac12+\frac13+\frac14 > 1+\frac12+2\cdot\frac14 = 2$, $1+\frac12+\frac13+\frac14+\frac15+\frac16+\frac17+\frac18 > 1+\frac12+2\cdot\frac14+4\cdot\frac18 = 2\frac12$. Następnie $1+\frac12+\frac13+\frac14+\frac15+\frac16+\frac17+\frac18+\frac19+\frac1{10}+\frac1{11}+\frac1{12}+\frac1{13}+\frac1{14}+\frac1{15}+\frac1{16} > 1+\frac12+2\cdot\frac14+4\cdot\frac18+8\frac1{16}=3$. Wskazujemy kolejno wyrazy rozpatrywanego ciągu większe od 2, $2\frac12$, 3, $3\frac12$, …. Ponieważ ciąg jest ściśle rosnący, więc jeśli któryś wyraz jest większy od np. 3, to wszystkie następne tym bardziej.

Po tym przykładzie warto zlecić wykazanie tego, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2\,.$$

To łatwe:
$1+\frac1{2^2}+\frac1{3^2}+\cdots+\frac1{n^2} < 1+\frac1{1\cdot2}+\frac1{2\cdot3}+\cdots+\frac1{(n-1)\cdot n} = 1+\frac11-\frac12+\frac12-\frac13+\cdots+\frac1{n-1}-\frac1n = 2-\frac1n < 2\,.$
Wykazaliśmy oczekiwaną nierówność. Wiemy więc, że istnieje skończona granica

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac1{2^2}+\tfrac1{3^2}+\cdots+\tfrac1{n^2}).$$

Możemy zapytać czemu jest równa. Można spodziewać się, że część z tych, którzy nic na temat nie słyszeli wcześniej odpowie: 2. Co powinnismy odpowiedzieć?

Pierwsza wersja (nowoczesna): ależ skąd! Przecież już Euler w XVIII w. udowodnił, że $g=\frac{\pi^2}{6}$. A jego nazwisko, co GWO uważa za ważne, jest w księdze rekordów Guinessa.

Druga wersja (staromodna): ależ skąd! Przecież dla każdego $n>3$ zachodzi nierówność

$$1+\tfrac1{2^2}+\tfrac1{3^2}+\cdots+\tfrac1{n^2} < 1+\tfrac1{2^2}+\tfrac1{2\cdot3}+\tfrac1{3\cdot4}+\cdots+\tfrac1{(n-1)\cdot n} =$$
$$= 1+\tfrac14+\tfrac12-\tfrac13+\tfrac13-\tfrac14+\cdots+\tfrac1{n-1}-\tfrac1n = 1+\tfrac14+\tfrac12-\tfrac1n < 1\tfrac34,$$

więc $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac1{2^2}+\frac1{3^2}+\cdots+\frac1{n^2}) \le \frac74$.

Niezależnie od wyboru wersji warto powiedzieć w tym miejscu, że w niektórych sytuacjach łatwo można stwierdzić istnienie granicy, można ją nawet z niezłą dokładnością „obliczyć”. Jednak znalezienie dokładnej wartości może być problemem z wyższej (i to znacznie) półki. ■

Zadanie 15. Niech $a_0>0$. Definiujemy $a_{n+1}=\frac12(a_n+\frac7{a_n})$. Udowodnić, że dla każdego $n\ge1$ zachodzi nierówność $a_n\ge\sqrt7$ oraz że $a_1\ge a_2\ge a_2\ge a_3\ge\ldots$ Udowodnić, że $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt7$ oraz że $a_{n+1}-\sqrt7\le\frac15(a_n-\sqrt7)^2$.
Mamy $a_{n+1}-\sqrt7=\frac12(a_n+\frac7{a_n})-\sqrt7=\frac1{2a_n}(a_n^2+7)-2a_n\sqrt7=\frac1{2a_n}(a_n-\sqrt7)^2\ge0$ dla $n=0,1,2\ldots$. Pierwszą część tezy udowodniliśmy. $a_n-a_{n+1}=a_n-\frac12\big(a_n+\frac7{a_n}\big)=\frac1{2a_n}\big(a_n^2-7\big)\ge0$, jeśli $a_n\ge\sqrt7$, a tak jest dla $n=1,2,\ldots$ Udowodniliśmy, że ciąg $a_1,a_2,a_3,\ldots$ jest nierosnący a jego wyrazy

nie są mniejsze od $\sqrt{7}$. Ma on więc skończoną granicę $g \geq \sqrt{7}$. Mamy więc

$$g = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(g + \frac{7}{g}\right),$$

zatem $g = \frac{7}{g}$, a ponieważ $g > 0$, więc $g = \sqrt{7}$.
Mamy też $2\sqrt{7} = \sqrt{28} > \sqrt{25} = 5$. Stąd wynika, że $a_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2a_n}\big(a_n - \sqrt{7}\big)^2 \leq \frac{1}{5}\big(a_n - \sqrt{7}\big)^2$. Zadanie zostało rozwiązane. Dodajmy jeszcze, że jeśli $a_n - \sqrt{7} < \frac{1}{10}$, to $a_{n+1} - \sqrt{7} < \frac{1}{5}(\frac{1}{10})^2 = \frac{1}{500}$ a $a_{n+2} - \sqrt{7} < \frac{1}{5}(\frac{1}{500})^2 = \frac{1}{1\,250\,000}$. Widac więc, że jeśli chcielibyśmy znajdować przybliżenia wymierne liczby $\sqrt{7}$, to zdefiniowany ciąg nadaje się do tego celu bardzo dobrze. ■

Zadanie 16. Udowodnić, że jeśli $n > -x$, to $(1 + \frac{x}{n})^n \leq (1 + \frac{x}{n+1})^{n+1}$.

Rozwiązanie Jeśli $n > -x$, to $\frac{x}{n} > -1$, więc $1 + \frac{x}{n} > 0$, zatem mamy dowieść, że

$$\frac{(1 + \frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{x}{n})^n} \geq 1\,.$$

Skorzystamy z nierówności Bernoulliego.

$$\frac{(1 + \frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{x}{n})^n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\frac{(1 + \frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{x}{n})^{n+1}} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \geq$$

$$\geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + (n+1)\frac{\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right) = 1 + \frac{x}{n} + (n+1)\left(\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}\right) = 1\,.$$

Trzeba jeszcze zauważyć, że wolno zastosować nierówność Bernoulliego, czyli stwierdzić, że $\frac{\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}} > -1$. Gdy $x < 0$, to $\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n} > 0$, bo wtedy $\frac{x}{n+1} > \frac{x}{n}$. Gdy $x \geq 0$, to $\frac{x}{n} \geq \frac{x}{n+1}$, więc $0 \leq \frac{x}{n} - \frac{x}{n+1} < 1 + \frac{x}{n}$, więc $0 \geq \frac{\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}} > -1$, więc mieliśmy prawo skorzystać z nierówności Bernoulliego. ■

Oczywiście pomimo krótkiego rozwiązania nie jest to łatwe. Jednak można je rozbić na dwa zadania:

Zadanie 17. Udowodnić, że jeśli $n > -x$, to $\frac{\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}} > -1$.

Zadanie 18. Udowodnić, że jeśli $n > -x$, to $(1 + \frac{x}{n})^n \leq (1 + \frac{x}{n+1})^{n+1}$. ■

Oczywiście mało kto zastosuje nierówność Bernoulliego dla wykładnika $n + 1$, ale to nie jest konieczne. Stosując nierówność dla wykładnika n też zadanie da się rozwiązać. Pokażemy odpowiednią część rozumowania. Mamy

$$\frac{(1 + \frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{x}{n})^n} = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\left(1 + \frac{\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^n \geq$$

$$\geq \left(1+\frac{x}{n+1}\right)\left(1+n\frac{\frac{x}{n+1}-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)=1+\frac{x}{n+1}+n\frac{n+1+x}{n+1}\,\frac{-x}{(n+1)(n+x)}=$$

$$=1+x\,\frac{(n+1)(n+x)-n(n+1+x)}{(n+1)(n+x)}=1+x\,\frac{x}{(n+1)(n+x)}=1+\frac{x^2}{(n+1)(n+x)}\geq 1\,.$$

Te obliczenia są mniej pomysłowe od poprzednich, wynik jest w końcu taki sam. Pokazałem, bo jeśli miałbym to opowiedzieć w czasie lekcji lub na kółku, kazałbym uczniom zrobić to samodzielnie mówiąc, że mają zastosować nierówność Bernoulliego. Zapewne zastosowaliby drugą, więc dłuższą metodę. Pokazałbym na koniec krótszą w ramach stosowania teorii: *szkoła uczy myśleć.*

Wiemy już, że dla każdej liczby rzeczywistej x ciąg o wyrazie $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ jest od pewnego miejsca niemalejący (dla $x\neq 0$ — ściśle rosnący). Ma więc granicę, ale nie wiemy, czy jest ona skończona. Jest tak z pewnością dla $x\leq 0$, bo wtedy jeśli $n>-x$, to $0<\left(1+\frac{x}{n}\right)^n<1^n=1$, więc jest też ograniczony z góry.

Niebawem przekonamy się, że jest ona skończona dla każdej liczby $x\in\mathbb{R}$.

Lemat 21. (o granicach n-tych potęg ciągów „szybko zbieżnych" do 1)
Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a_n=0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^n=1$.

Dowód.
Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a_n=0$, więc istnieje n_0 takie, że jeśli $n>n_0$, to $|n\cdot a_n|<\frac{1}{2}$.
Wtedy $|a_n|=\frac{1}{n}\cdot(|n\cdot a_n|)<\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}$. Wobec tego dla każdej liczby naturalnej $n>n_0$ zachodzą nierówności: $n\cdot a_n>-\frac{1}{2}>-1$, $\frac{a_n}{1+a_n}>-1$ oraz $\frac{n\cdot a_n}{1+a_n}<1$, co usprawiedliwia dwukrotne stosowanie nierówności Bernoulli'ego w wierszu poniżej

$$1+n\cdot a_n\leq(1+a_n)^n=\frac{1}{\left(1-\frac{a_n}{1+a_n}\right)^n}\leq\frac{1}{1-\frac{na_n}{1+a_n}}$$

Czytelnik zwróci uwagę na to, że dzięki wyborowi n_0 stosowanie nierówności Bernoulli'ego prowadzi do wyrażeń dodatnich, więc przejście do ich odwrotności jest usprawiedliwione — stosowaliśmy nierówność Bernoulli'ego do mianownika! Teza lematu wynika z twierdzenia o trzech ciągach, bowiem $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n\cdot a_n)==1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{na_n}{1+a_n}}$. Lemat został udowodniony. ■

Z lematu o granicach ciągów szybko zbieżnych do 1, wynika, że
$$1=\lim_{n\to\infty}(1-\tfrac{x^2}{n^2})^n=\lim_{n\to\infty}(1-\tfrac{x}{n})^n(1+\tfrac{x}{n})^n.$$
Stąd i z tego, że dla $x>0$ granica ciągu o wyrazie $(1-\frac{x}{n})^n$ jest dodatnia, wynika, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1-\frac{x}{n})^n}\,,$$

więc również granica ciągu o wyrazie $(1+\frac{x}{n})^n$ jest skończona i dodatnia.

Definicja 22. $\exp(x)$ oznaczać będzie w dalszym ciągu granicę ciągu $\left((1+\frac{x}{n})^n\right)$, tzn.

$$\exp(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Wobec tego symbol exp oznacza funkcję, która jest określona na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych, jej wartością w punkcie x jest liczba dodatnia $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. ■

Twierdzenie 23. (Równanie podstawowe)
Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość: $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$.
Skorzystamy z określenia liczby $\exp(x)$ i tego, że $\exp(x+y) > 0$, co udowodniliśmy wcześniej. Równość, którą mamy udowodnić, jest równoważna temu, że $\frac{\exp(x)\cdot\exp(y)}{\exp(x+y)} = 1$. Mamy

$$\frac{\exp(x)\cdot\exp(y)}{\exp(x+y)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n = 1$$

Ostatnia równość wynika z lematu o ciągach szybko zbieżnych do 1 i z tego, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right) = 0. \ \blacksquare$$

Twierdzenie 24. Dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi wzór $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
Mamy $\exp(0) = \exp(0+0) = \exp(0)\cdot\exp(0)$, a ponieważ $\exp(0)$ jest liczbą dodatnią, więc $\exp(0) = 1$.[2] Wobec tego $1 = \exp(0) = \exp(-x+x) = \exp(-x)\cdot\exp(x)$, zatem zachodzi wzór $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$. $\blacksquare$

Definicja 25. Definicja potęgi o wykładniku wymiernym
Jeśli $a > 0$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, *to* $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$. $\blacksquare$

Dla $a < 0$ są kłopoty z definicja i z własnościami funkcji wykładniczej, więc w wielu szkołach nauczyciele po prostu zakładają, że podstawa potęgi musi być dodatnia. To samo założenie przyjmują również autorzy wielu znanych programów komputerowych i dzieła ich autorstwa nie lubią wyrażeń typu $(-8)^{1/3}$. Zapewne po drodze, w obliczeniach, programy takie używają logarytmów. Autor tego tekstu jednak dopuszcza ujemną podstawę w następującej sytuacji $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, nie istnieje $x \in \mathbb{Z}$ takie, że $q = 2x$, czyli q jest nieparzyste i nie istnieją $k, l, m \in \mathbb{Z}$ takie, że $m > 1$, $p = km$ i jednocześnie $q = lm$, czyli p, q są względnie pierwsze. Jeśli $a > 0$ i $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, $p, r \in \mathbb{Z}$, $q, s \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, to $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[s]{a^r}$, bowiem ta równość równoważna jest temu, że $\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{qs} = \left(\sqrt[s]{a^r}\right)^{qs}$, czyli $a^{ps} = a^{qr}$ (twierdzenie o istnieniu pierwiastka), a to wynika z tego, że $ps = qr$. Stąd wynika, że definicja potęgi o wykładniku wymiernym jest zależna od wykładnika, a nie od jego przedstawienia w postaci ilorazu licz całkowitych. Te uwagi nie dotyczą potęgowania, gdy podstawa jest ujemna: $(-1)^{1/3} = \sqrt[3]{(-1)^1} = -1$, ale $(-1)^{2/6} = \sqrt[6]{(-1)^2} = 1$, więc nawet definicja w przypadku ujemnej podstawy nie jest całkiem w porządku. Tym nie mniej często jest wygodnie stosować zapis $a^{p/q}$ w przypadku ujemnego a, ale wtedy trzeba zdawać sobie sprawę z ograniczeń w twierdzeniach dotyczących potęg, czyli mieć świadomość, że mogą pojawić się jakieś dziwne kłopoty.

Stwierdzenie 26. Dla dowolnej liczby rzeczywistej x, dowolnej liczby całkowitej p i dowolnej dodatniej liczby całkowitej q zachodzi wzór: $\exp(\frac{p}{q}x) = (\exp(x))^{p/q}$.

Dowód. Jeśli m jest liczbą naturalną, y – rzeczywistą to $\exp(my) = \exp(y+y+\cdots+y) = \exp(y)\cdot\exp(y)\cdot\cdots\cdot\exp(y) = (\exp(y))^m$. Stąd wynika, że $\exp(\frac{x}{q}) = \sqrt[q]{\exp(x)} = (\exp(x))^{1/q}$ — stosujemy poprzedni wzór przyjmując $y = \frac{x}{m}$ i $m = q$. Dla $p > 0$, zachodzi więc równość $\exp(\frac{p}{q}x) = \left(\exp(\frac{x}{q})\right)^p = \left((\exp(x))^{1/q}\right)^p = (\exp(x))^{p/q}$. Teraz załóżmy, że $p < 0$. Mamy

[2] inny dowód: $\exp(0) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

wobec tego $\exp(\frac{p}{q}x) = \frac{1}{\exp(\frac{-p}{q}x)} = \frac{1}{(\exp(x))^{-p/q}} = (\exp(x))^{p/q}$. Udowodniliśmy więc wzór, który chcieliśmy wykazać. ■

Definicja 27. (liczby e)
Liczbą e nazywamy granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, czyli $e = \exp(1)$. ■
Liczbą tą zajmował się intensywnie jako pierwszy L.Euler, matematyk szwajcarski zatrudniany przez Petersburską Akademię Nauki (1727-1744,1766-1783) i Berlińską Akademię Nauki (1744-1766). Ma ona duże znaczenie w matematyce. Z punktu widzenia tego wykładu jest to najważniejsza podstawa potęg i logarytmów. Z tego, co wykazaliśmy do tej pory, wynika, że $\exp(w) = e^w$ dla każdej liczby wymiernej w — we wzorze ze stwierdzenia 26 przyjmujemy $x = 1$ oraz $\frac{p}{q} = w$. Wiemy też, że $e = \exp(1) \ge 1 + 1 = 2$, bo $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge 1 + n\cdot\frac{1}{n} = 1 + 1$.

Stwierdzenie 28.
Dla każdej liczby rzeczywistej $x < 1$, zachodzi nierówność podwójna $1 + x \le \exp(x) \le \frac{1}{1-x}$.

Dowód. Jeśli $n > -x$, to $\frac{x}{n} > -1$. Z nierówności Bernoulli'ego wynika, że

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \ge 1 + n\cdot\frac{x}{n} = 1 + x\,.$$

Stąd wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \ge \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+n\cdot\frac{x}{n}\right) = 1 + x$. Wobec tego lewa nierówność zachodzi i to dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Zajmiemy się prawą. Mamy $\exp(-x) \ge 1 - x$, co wynika z nierówności $\exp(x) \ge 1 + x$ po zastąpieniu liczby x liczbą $(-x)$. Stąd $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \le \frac{1}{1-x}$. ■

Stwierdzenie 29. (Ciągłość funkcji exp**)**
Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, to również $\lim\limits_{n\to\infty}\exp(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\exp(x)$.

Dowód. Dokładnie ta własność funkcji wykładniczej jest nazywana jej ciągłością. Własnościami funkcji ciągłych i różnymi określeniami ciągłości zajmiemy się później. Teraz udowodnimy, że funkcja exp jest ciągła. Załóżmy, że $|h| < \frac{1}{2}$. Wtedy $h \le \exp(h) - 1 \le \frac{1}{1-h} - 1 = \frac{h}{1-h}$. Stąd wynika, że jeśli $|h| < \frac{1}{2}$, to $|\exp(h) - 1| \le 2|h|$. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, to dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $|x_n - x| < \frac{1}{2}$, zatem

$$0 \le |\exp(x_n) - \exp(x)| = |\exp(x)\left(\exp(x_n - x) - 1\right)| \le \exp(x)\cdot 2\cdot |x_n - x|.$$

Dowodzona teza wynika więc z twierdzenia o trzech ciągach. ■

Twierdzenie 30. (charakteryzujące funkcję wykładniczą)
Załóżmy, że na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych określona jest funkcja f, taka że

(i) jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, to $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, tzn. funkcja f jest ciągła;

(ii) dla dowolnych liczb rzeczywistych zachodzi równość $f(x + y) = f(x)f(y)$;

(iii) $f(1) = e = \exp(1)$.

Wtedy dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = \exp(x)$.

Twierdzenie w istocie rzeczy mówi, że własności (i) oraz (ii) są podstawowymi własnościami funkcji wykładniczej. Własność (iii) ustala podstawę potęgi, gdyby w tym twierdzeniu opuścić założenie (iii), to teza brzmiałaby $f(x) = (f(1))^x$. Udowodnimy to twierdzenie.

Dowód. Mamy $f(x) = f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})\cdot f(\frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})^2 \geq 0$. Jeśli dla pewnej liczby rzeczywistej x_1 zachodzi równość $f(x_1) = 0$, to $f(x) = f(x_1)f(x-x_1) = 0$ dla każdej liczby x. Wobec tego albo funkcja f jest dodatnia w każdym punkcie, albo jest równa 0 w każdym punkcie. W naszym przypadku $f(1) \neq 0$, zatem nasza funkcja przyjmuje jedynie wartości dodatnie. Rozumując tak jak w przypadku funkcji exp, zob. dowód stwierdzenia 26, stwierdzamy bez trudu, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x, dowolnej liczby całkowitej p i dowolnej całkowitej liczby dodatniej q zachodzi równość $f(\frac{p}{q}x) = (f(x))^{p/q}$. W szczególności ma to miejsce dla $x = 1$, a to oznacza, że $f(\frac{p}{q}) = (f(1))^{p/q} = e^{p/q} = \exp(\frac{p}{q})$. Wykazaliśmy zatem, że funkcja f pokrywa się z funkcją exp na zbiorze wszystkich liczb wymiernych. Dla dowolnej liczby rzeczywistej x, istnieje ciąg liczb wymiernych (w_n), którego granicą jest x. Wobec tego, dzięki ciągłości funkcji f i funkcji exp możemy napisać: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(w_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \exp(w_n) = \exp(x)$. ∎

Autor nie ma pojęcia, jak obecnie w szkołach definiowana jest potęga o wykładniku niewymiernym, zresztą to może zależeć od nauczyciela, podręcznika, plam na Słońcu i innych czynników, „podejrzewa", że większość maturzystów nie potrafi powtórzyć żadnej definicji. W istocie rzeczy wszystkie definicje w jawnej lub niejawnej formie muszą odwoływać się do ciągłości i określenia wartości funkcji w przypadku argumentów wymiernych. Jedna z możliwości ominięcia tej długiej drogi to przyjęcie, że $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Wtedy od razu mamy do dyspozycji różne twierdzenia o granicach, a z nich wynikają łatwo własności funkcji wykładniczej. Jednak jest to droga wysoce nienaturalna we wstępnej fazie nauki o funkcji wykładniczej, więc trudno ją polecać.

Zapewne pojęciem łatwiejszym od ciągłości jest monotoniczność. Można bez większych trudności zastąpić ciągłość monotonicznością

Twierdzenie 31. (charakteryzujące funkcję wykładniczą)
Załóżmy, że na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych określona jest funkcja f, taka że

(i) jeśli $x < y$, to $f(x) < f(y)$, tzn. funkcja f jest ściśle rosnąca;

(ii) dla dowolnych liczb rzeczywistych zachodzi równość $f(x+y) = f(x)f(y)$;

(iii) $f(1) = e = \exp(1)$.

Wtedy dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = \exp(x)$.

Dowód. Jeśli $x \geq 0$, to $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x)$, bo ta nierówność jest równoważna temu, że $0 \leq x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x}-1)^2$, a ta jest prawdziwa, bo kwadraty liczb rzeczywistych są liczbami nieujemnymi. Ponieważ $f(x) = f(\frac{x}{2})^2$, więc $f(\frac{x}{2}) \leq \frac{1}{2}(1+f(x))$. Otrzymujemy z tej nierówności kolejne oszacowania:

$1 < f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}(1+f(1)) = 1 + \frac{1}{2}(f(1)-1)$,

$1 < f(\frac{1}{4}) \leq \frac{1}{2}(1+f(\frac{1}{2})) \leq \frac{1}{2}(1+1+\frac{1}{2}(f(1)-1)) = 1 + \frac{1}{4}(f(1)-1)$,

$1 < f(\frac{1}{8}) \leq \frac{1}{2}(1+f(\frac{1}{4})) \leq \frac{1}{2}(1+1+\frac{1}{4}(f(1)-1)) = 1 + \frac{1}{8}(f(1)-1)$,

$1 < f(\frac{1}{16}) \leq \frac{1}{2}(1+f(\frac{1}{8})) \leq \frac{1}{2}(1+1+\frac{1}{8}(f(1)-1)) = 1 + \frac{1}{16}(f(1)-1)$.

Ogólnie otrzymujemy nierówność $1 < f(\frac{1}{2^k}) \le 1 + \frac{1}{2^k}(f(1) - 1)$ dla każdej liczby naturalnej $k > 0$. Z otrzymanej nierówności i z monotoniczności funkcji f wynika, że jeśli $0 < x - y < \frac{1}{2^k}$ dla pewnej liczby naturalnej $k > 0$, to $0 < f(x) - f(y) = f(y)(f(x-y) - 1) \le f(y)(f(\frac{1}{2^k}) - 1) \le f(y) \cdot \frac{1}{2^k}(f(1) - 1) < f(x) \cdot \frac{1}{2^k}(f(1) - 1)$. W taki sam sposób dowodzimy, że jeśli $0 < y - x < \frac{1}{2^k}$, to $0 < f(y) - f(x) < f(x) \cdot \frac{1}{2^k}(f(1) - 1)$. Z tych nierówności i z definicji granicy ciągu wynika od razu, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, to $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Podany tu dowód ciągłości rosnącej funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniającej warunek (ii) korzysta jedynie z bardzo prostej nierówności $\sqrt{x} \le \frac{1}{2}(1 + x)$, zresztą udowodnione w tekście. Być może lepszym uczniom warto wspomnieć o tym, że takie własności charakteryzują funkcję wykładniczą. Przy okazji warto powiedzieć, że rozszerzając kolejno definicję potęgi dbamy właśnie o to, by równanie (ii) było spełnione — to jest najbardziej podstawowa własność potęgowania, inne z niej i z monotoniczności lub z ciągłości już wynikają. ■