KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ · ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Iława, 1 grudnia 2012: podzielność, trójkąty i czworokąty

Michał Krych

Bardzo proszę o powiadamianie o zauważanych błędach.

1. Dzielnikami naturalnymi liczby 12 są 1, 2, 3, 4, 6 i 12. Ile dzielników naturalnych ma liczba $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12=479001600$?

2. Czy liczba $10!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10=3\,628\,800$ jest podzielna przez liczbę $2^{10}=1024$?

Dla jakich liczb n spośród $1,2,3,4,\ldots$ liczba $n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots(n-1)\cdot n$ jest podzielna przez liczbę 2^n?

3. Niech $a=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{13}{15}\cdot\frac{17}{19}\cdot\frac{21}{23}\cdot\ldots\cdot\frac{2001}{2003}\cdot\frac{2005}{2007}$, $b=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{12}\cdot\ldots\cdot\frac{1001}{1002}\cdot\frac{1003}{1004}$. Która z liczb a,b jest większa i dlaczego?

4. Udowodnić cechę podzielności przez 3 i przez 9 (nieco poprawiona wersja): reszta z dzielenia danej liczby naturalnej przez 3 (odpowiednio przez 9) równa jest reszcie z dzielenia jej sumy cyfr (w układzie dziesiątkowym) przez 3 (odpowiednio przez 9).

5. Można sformułować podobne cechy podzielności przez 11 i przez 99: dzielimy liczbę na grupy dwucyfrowe zaczynając od cyfry dziesiątek i jedności, następnie z cyfry tysięcy i setek i tak dalej, sumujemy te liczby dwucyfrowe (ostatnia może być jednocyfrowa).

Udowodnić, że reszty z dzielenia otrzymanej i wyjściowej liczby z dzielenia przez 99 (również przez 11, 9, 3, 33).

6. Można sformułować podobne cechy podzielności przez 27 i 37: dzielimy liczbę na grupy trzycyfrowe zaczynając od cyfry setek, cyfry dziesiątek i cyfry jedności, następnie z cyfry setek tysięcy, cyfry dziesiątek tysięcy i cyfry tysięcy i tak dalej, sumujemy te liczby trzycyfrowe (ostatnia może mieć mniej cyfr).

Udowodnić, że reszty z dzielenia otrzymanej i wyjściowej liczby z dzielenia przez 999 (również przez 27, 37, 3, 9, 111, 333).

7. Dla jakich liczb k można sformułować cechy podzielności typu opisanego w poprzednich trzech zadaniach?

8. Załóżmy, że $N=\overline{a_na_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0}=$
$=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+a_{n-2}\cdot10^{n-2}++\ldots+a_2\cdot10^2+a_1\cdot10+a_0$, przy czym $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{n-2},a_{n-1},a_n\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ — oznacza to, że liczby a_0, a_1, … są kolejnymi cyframi liczby N: a_0 to cyfra jedności, a_1 to cyfra dziesiątek, $a-2$ to cyfra setek itd.

Udowodnić, że reszta z dzielenia liczby n przez 11 jest równa reszcie z dzielenia przez 11 liczby $a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots$.

9. Sformułować cechę podzielności przez 101 analogiczną do cechy podzielności przez 11 opisanej w poprzednim zadaniu.

10. Sformułować cechę podzielności przez 1001 oraz przez 7, 11, 13, 77, 91, 143 analogiczną do cech podzielności przez 11 i 101 opisanych w poprzednich dwóch zadaniach.

11. Wykazać, że każda z liczb: 10001, $99\,999\,999$, $1\,000\,000\,000\,001$, $9\,999\,999\,999\,999\,999$, $100\,000\,000\,000\,000\,000\,001, \ldots$, czyli z liczb postaci $10000^n + (-1)^{n+1}$ dla $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ jest podzielna przez 73.

12. Udowodnić, że jeśli $x^2+y^2 = z^2$ dla pewnych liczb całkowitych x, y, z, to liczba xyz jest podzielna przez 60.

13. Dane są takie liczby całkowite a i b, że $2a^2+a = 3b^3+b$. Udowodnić, że liczby $a-b$ oraz $2a+2b+1$ są kwadratami liczba całkowitych,

14. Udowodnić wzór na pole równoległoboku korzystając z wzoru na pole prostokąta.

W zdecydowanej większości znanych mi podręcznków dowód jest niekompletny, chodzi o pełny dowód obejmujący wszystkie przypadki.

15. Udowodnić wzór na pole trapezu

16. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L, M i N, P i Q, R i S dzielą kolejno każdy z boków AB, BC, CD i DA na równe części i pojawiają się na nich w podanej kolejności. Wykazać, że odcinki KQ i LP są podzielone odcinkami MS i NR na równe części oraz że pole środkowego z powstałych dziewięciu czworokątów jest równe $\frac{1}{9}$ pola czworokąta $ABCD$. Podać przykład świadczący o tym, że pola dziewięciu czworokątów mogą być różne, chociaż suma pól trzech z nich "tworzących grubą przekątną" jest równa $\frac{1}{3}$ pola czworokąta $ABCD$.

A jak można fizycznie uzasadnić pierwszą część tezy?

17. Uogólnić twierdzenie z poprzedniego zadania: rozpatrzeć podziały boków na większą liczbę równych części.

18. Udowodnić, że boki AB i CD czworokąta wypukłego $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie S, są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy pola trójkątów ADS i BCS są równe.

19. Niech czworokąt wypukły $ABCD$ będzie trapezem o podstawach AB i CD, a S punktem przecięcia jego przekątnych. Niech R, T będą takimi punktami ramion AD i BC, że odcinek RT jest równoległy do podstaw trapezu $ABCD$ i zawiera punkt S. Udowodnić, że S jest środkiem odcinka RT.

20. Przyjmujemy oznaczenia z poprzedniego zadania oraz $a = AB$ i $b = CD$. Wyrazić długość odcinka RT za pomocą a i b. Znaleźć stosunki pól trójkątów ABS, BCS, CDS i DAS do pola trapezu $ABCD$.

21. Przyjmujemy oznaczenia z poprzedniego zadania i zakładamy dodatkowo, że $a > b$. Niech O oznacza punkt wspólny prostych AD i BC. Niech M będzie punktem wspólnym prostych SO i AB. Udowodnić, że M jest środkiem odcinka AB.

Niech N będzie punktem wspólnym prostych MC i BD, a M_1 — punktem wspólnym prostych ON i AB. Udowodnić, że $\frac{M_1B}{AB} = \frac{1}{3}$.

Niech N_1 będzie punktem wspólnym prostych M_1C i BD, a M_2 — punktem wspólnym prostych ON_1 i AB. Udowodnić, że $\frac{M_2B}{AB} = \frac{1}{4}$.

22. Dane są proste równoległe ℓ i m. Na prostej ℓ dany jest odcinek AB. Skonstruować za pomocą samej linijki (bez podziałki) odcinek trzy razy dłuższy od odcinka AB.

23. Wykazać, że w czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $AB + CD = BC + DA$.

24. Wykazać, że jeśli w sześciokąt wypukły $ABCDEF$ można wpisać okrąg, to $AB + CD + EF = BC + DE + FA$. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

25. Sformułować i udowodnić odpowiednie twierdzenie dla sześciokąta, na którym można opisać okrąg.

26. Każda z przekątnych AD, BE i CF dzieli na połowy pole sześciokąta wypukłego $ABCDEF$. Dowieść, że te przekątne przecinają się w jednym punkcie.

27. Udowodnić, że jeśli środkowe m_A i m_B trójkąta ABC są równe, to $BC = AC$.

28. Udowodnić, że jeśli wysokości h_A i h_B trójkąta ABC są równe, to $BC = AC$.

29. Udowodnić, że jeśli dwusieczne d_A i d_B trójkąta ABC są równe, to $BC = AC$.

30. W trójkącie ABC oba kąty przy podstawie BC są równe 80°. Punkt D leży na ramieniu AB a punkt E — na ramieniu AC. Zachodzą równości $\sphericalangle DCB = 60^\circ$ i $\sphericalangle EBC = 50^\circ$. Znaleźć kąt $\sphericalangle EDC$.

Zadania 23 — 30 nie zostały omówione 1 grudnia, ale uważam je, zwłaszcza w zestawach 23 z 24 i 25 oraz 27, 28 i 29 (dwa pierwsze łatwiutkie w odróżnieniu od trzeciego), za kształcące, więc ich z pliku nie usuwam

Rozwiązania

1. Dzielnikami naturalnymi liczby 12 są 1, $2, 3$, 4, 6 i 12. Ile dzielników naturalnych ma liczba $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 479001600$?

Rozwiązanie: Mamy $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$. Każdy dzielnik tej liczby jest postaci $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^f$, gdzie $a \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $b \in \{0,1,2,3,4,5,\}$, $c \in \{0,1,2\}$, $d \in \{0,1\}$ i $f \in \{0,1\}$, np. jedynkę otrzymujemy przyjmując $a = b = c = d = f = 0$, liczbę 12 — dla $a = 2$, $b = 3$, $c = d = f = 0$ itd. Wobec tego naturalnych dzielników jest tyle samo, ile piątek liczb (a,b,c,d,f), zatem jest ich $11 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 792$.

2. Czy liczba $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800$ jest podzielna przez liczbę $2^{10} = 1024$?

Dla jakich liczb n spośród $1,2,3,4,\ldots$ liczba $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots (n-1) \cdot n$ jest podzielna przez liczbę 2^n?

Rozwiązanie: Liczba 2 wchodzi w rozkład liczby $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ na czynniki pierwsze z wykładnikiem 8, więc nie jest podzielna przez 2^{10}.

3. Niech $a = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{13}{15} \cdot \frac{17}{19} \cdot \frac{21}{23} \cdot \ldots \cdot \frac{2001}{2003} \cdot \frac{2005}{2007}$, $b = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{11}{12} \cdot \ldots \cdot \frac{1001}{1002} \cdot \frac{1003}{1004}$. Która z liczb a, b jest większa i dlaczego?

Rozwiązanie: Większa jest liczba b. Każda z liczb a, b jest iloczynem 502 ułamków. Mamy też $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, $\frac{5}{7} = 1 - \frac{2}{7} < 1 - \frac{2}{8} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $\frac{9}{11} = 1 - \frac{2}{11} < 1 - \frac{2}{12} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, $\ldots$ Widać więc, że czynniki liczby a są mniejsze od odpowiednich czynników liczby b, a iloczyn mniejszych liczb dodatnich jest mniejszy.

4. Udowodnić cechę podzielności przez 3 i przez 9 (nieco poprawiona wersja): reszta z dzielenia danej liczby naturalnej przez 3 (odpowiednio przez 9) równa jest reszcie z dzielenia jej sumy cyfr (w układzie dziesiątkowym) przez 3 (odpowiednio przez 9).

Rozwiązanie: Zaczniemy od przykładu. Rozważmy liczbę 4567321. Mamy $4\,567\,321 = 1 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 100 + 7 \cdot 1\,000 + 6 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 100\,000 + 4 \cdot 1\,000\,000 = 1+2+3+7+6+5+4+2 \cdot 9 + 3 \cdot 99 + 7 \cdot 999 + 6 \cdot 9\,999 + 5 \cdot 99\,999 + 4 \cdot 999\,999$. I to właściwie koniec, bo liczba $2 \cdot 9 + 3 \cdot 99 + 7 \cdot 999 + 6 \cdot 9\,999 + 5 \cdot 99\,999 + 4 \cdot 999\,999$ jest podzielna przez 9, więc również przez 3 i jako taka nie ma wpływu na resztę z dzielenia przez te dwie liczby. Wykazaliśmy, że **w tym wypadku** teza twierdzenia jest prawdziwa. A co z dowodem w ogólnej sytuacji. Jest właściwie taki sam. Należy jakoś oznaczyć liczbę cyfr danej liczby N w układzie dziesiątkowym, np. przez n a potem cyfry, np. przez a_0, a_1, $\ldots$, a_n i wszystko zapisać. Autor tekstu zdecydował, że $a_0 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ to cyfra jedności, a_1 to cyfra dziesiątek, a_2 to cyfra setek itd. Pozwala to napisać równość

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 100 + \ldots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_n \cdot 10^n =$$
$$= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_1 \cdot 9 + a_2 \cdot 99 + \ldots + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + a_n \cdot (10^n - 1)$$

i stwierdzić, że liczba $a_1 \cdot 9 + a_2 \cdot 99 + \ldots + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + a_n \cdot (10^n - 1)$ jest w oczywisty sposób podzielna przez 9, np. $10^n - 1 = \underbrace{99\ldots99}_{n \text{ dziewiątek}}$. Nie wpływa więc ona na resztę z dzielenia przez 9 lub przez 3.

5. Można sformułować podobne cechy podzielności przez 11 i przez 99: dzielimy liczbę na grupy dwucyfrowe zaczynając od cyfry dziesiątek i jedności, następnie z cyfry tysięcy i setek i tak dalej, sumujemy te liczby dwucyfrowe (ostatnia może być jednocyfrowa).
Udowodnić, że reszty z dzielenia otrzymanej i wyjściowej liczby z dzielenia przez 99 (również przez 11, 9, 3, 33).

Rozwiązanie: Rozważmy na początek liczbę 4567321. Mamy $4\,567\,321 = 21 + {}$ $+73 \cdot 100 + 56 \cdot 10\,000 + 4 \cdot 1\,000\,000 = 21 + 73 + 56 + 4 + 73 \cdot 99 + 56 \cdot 9\,999 +$ $4 \cdot 999\,999$. Jasne jest, że każda z liczb 99, $9\,999 = 99 \cdot 101$, $999\,999 = 99 \cdot 10\,101$ jest podzielna przez 99, więc również liczba $73 \cdot 99 + 56 \cdot 9\,999 + 4 \cdot 999\,999$ dzieli się bez reszty przez 99 i wobec tego nie ma wpływu na resztę z dzielenia liczby 4567321 przez 99, ani przez 3, 9, 11, 33. Przejdźmy do sytuacji ogólnej. Mamy $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 100 + \ldots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_n \cdot 10^n =$ $= \overline{a_1 a_0} + \overline{a_3 a_2} \cdot 100 + \overline{a_5 a_4} \cdot 10\,000 + \ldots = \big(\overline{a_1 a_0} + \overline{a_3 a_2} + \overline{a_5 a_4} + \ldots\big) +$ $+\big(\overline{a_3 a_2} \cdot 99 + \overline{a_5 a_4} \cdot 9\,999 + \ldots\big)$. Jest oczywiste, że liczba w drugim nawiasie jest podzielna przez 99, więc ten składnik nie ma wpływu na resztę z dzielenia liczby $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ przez 99, ani przez 3, 9, 11, 33. To zdanie kończy dowód twierdzenia.

6. Można sformułować podobne cechy podzielności przez 27 i 37: dzielimy liczbę na grupy trzycyfrowe zaczynając od cyfry setek, cyfry dziesiątek i cyfry jedności, następnie z cyfry setek tysięcy, cyfry dziesiątek tysięcy i cyfry tysięcy i tak dalej, sumujemy te liczby trzycyfrowe (ostatnia może mieć mniej cyfr).
Udowodnić, że reszty z dzielenia otrzymanej i wyjściowej liczby z dzielenia przez 999 (również przez 27, 37, 3, 9, 111, 333).

Rozwiązanie tego zadania jest dokładnie takie samo, jak poprzedniego z tym, że dzielimy teraz na grupy trzycyfrowe zamiast na dwucyfrowe i korzystamy z równości $27 \cdot 37 = 999$.

7. Dla jakich liczb k można sformułować cechy podzielności typu opisanego w poprzednich trzech zadaniach?

Rozwiązanie: Należy stwierdzić jakie liczby naturalne są dzielnikami którejś z liczb 9, 99, 999, $9\,999$, $99\,999$ itd. Oczywiście liczba k, która jest dzielnikiem liczby $\underbrace{99\ldots999}_{n \text{ dziewiątek}}$, nie jest podzielna ani przez 2, ani przez 5.

Załóżmy, że $2 \nmid k$ i $5 \nmid k$. Różnych, niezerowych reszt z dzielenia liczb przez liczbę k jest dokładnie $k-1$. Jeśli żadna z liczb 9, 99, ... s, $\underbrace{99\ldots999}_{k \text{ dziewiątek}}$ nie jest podzielna przez k, to wśród nich znajdują się co najmniej, które z dzielenia przez k dadzą tę samą resztę. Oznacza to, że ich różnica (odejmuje mniejszą od większej) jest podzielna przez liczbę k. Ta różnica jest postaci $\underbrace{99\ldots99}_{m}00\ldots00$. Ponieważ k jest niepodzielne ani przez 2, ani przez 5 więc liczba $\underbrace{99\ldots99}_{m}$ też jest podzielna przez k, co oznacza, że wśród pierwszych k liczb 9, 99, 999, $9\,999$, $99\,999$ itd. co najmniej jedna dzieli się przez k. Wobec cechy omawianego rodzaju można sformułować dla każdej liczby liczby k względnie pierwszej z 10.

8. Załóżmy, że $N = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0} =$
$= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, przy czym $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ — oznacza to, że liczby a_0, a_1, ... są kolejnymi cyframi liczby N: a_0 to cyfra jedności, a_1 to cyfra dziesiątek, $a-2$ to cyfra setek itd.
Udowodnić, że reszta z dzielenia liczby n przez 11 jest równa reszcie z dzielenia przez 11 liczby $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$.

Rozwiązanie: Liczby $11 = 10 + 1$, $99 = 10 \cdot 11 - 11$, $1001 = 10 \cdot 99 + 11$, $9\,999 = 10 \cdot 1001 - 11$, $100\,001 = 10 \cdot 9\,999 + 11$, $999\,999 = 10 \cdot 100\,001 - 11$, itd. są przez 11 podzielne jako sumy lub różnice liczb podzielnych przez 11. Mamy więc $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + 11a_1 + 99a_2 + 1001a_3 + \ldots$, a ponieważ suma $11a_1 + 99a_2 + 1001a_3 + \ldots$ jest przez 11 podzielna, więc reszty z dzielenia przez 11 liczb $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ i $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$ są równe.

9. Sformułować cechę podzielności przez 101 analogiczną do cechy podzielności przez 11 opisanej w poprzednim zadaniu.

Rozwiązanie: Reszty z dzielenia przez 101 liczby $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ oraz liczby $\overline{a_1 a_0} - \overline{a_3 a_2} + \overline{a_5 a_4} - \ldots$ są równe. Szczegółów dowodu nie przytaczam, bo jest on praktycznie nie różni się on od dowodu zaprezentowanego w poprzednim zadaniu. Teraz korzystamy z tego, że liczby 101, $9\,999$, $1\,000\,001$, $99\,999\,999$, $10\,000\,000\,001$, $999\,999\,999\,999$, ... są podzielne przez 101.

10. Sformułować cechę podzielności przez 1001 oraz przez 7, 11, 13, 77, 91, 143 analogiczną do cech podzielności przez 11 i 101 opisanych w poprzednich dwóch zadaniach.

Rozwiązanie: Reszty z dzielenia przez 1001 liczby $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ oraz liczby $\overline{a_2 a_1 a_0} - \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_8 a_7 a_6} - \ldots$ są równe. Szczegółów dowodu nie przytaczam, bo jest on praktycznie nie różni się on od dowodu zaprezentowanego w zadaniu ósmym. Teraz korzystamy z tego, że wszystkie liczby: 1001, $999\,999$, $1\,000\,000\,001$, $999\,999\,999\,999$, $1\,000\,000\,000\,000\,001$, $999\,999\,999\,999\,999\,999$, ... są podzielne przez $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Przypuszczalnie teraz widać wyraźnie, że zapis $10^{3n} + (-1)^{n+1}$ jest co najmniej tak samo czytelny jak użyty wyżej. Tym nie mniej dla gimnazjalistów może być akurat odwrotnie. Podzielność przez 1001 liczb złożonych z samych dziewiątek, wymienionych wyżej, wynika z tego, że $999\,999 = 1001 \cdot 999$, a po odjęciu od tych złożonych z dwu jedynek i wielu zer liczby 1001 otrzymujemy liczbę złożoną z wielu dziewiątek, których liczba jest podzielna przez 6, i trzech zer na końcu.

11. Wykazać, że każda z liczb: 10001, $99\,999\,999$, $1\,000\,000\,000\,001$, $9\,999\,999\,999\,999\,999$, $100\,000\,000\,000\,000\,000\,001, \ldots$, czyli z liczb postaci $10000^n + (-1)^{n+1}$ dla $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ jest podzielna przez 73.

Rozwiązanie: To powtórzenie poprzedniego zadania z liczbą $10\,001 = 73 \cdot 137$ w roli liczby 1001, więc uzasadnienie jest takie samo jak w poprzednich trzech zadaniach z oczywistymi drobnymi zmianami.

12. Udowodnić, że jeśli $x^2+y^2 = z^2$ dla pewnych liczb całkowitych x, y, z, to liczba xyz jest podzielna przez 60.

Rozwiązanie: Jeśli $x^2 + y^2 = z^2$, gdzie x, y, z są liczbami całkowitymi, to, albo wszystkie one są podzielne przez 2, albo nie. W pierwszym przypadku dzielimy każdą przez 2 otrzymując nową trójkę liczb spełniających równanie $x^2 + y^2 = z^2$, po skończonej liczbie takich kroków dochodzimy do trójki liczb, z których co najmniej jedna jest nieparzysta. Powtarzamy procedurę kierując się teraz podzielnością przez 3, potem przez 5 i przez kolejne liczby pierwsze. W rezultacie otrzymujemy trójkę liczb, których NWD jest równy 1.

Wystarczy udowodnić twierdzenie dla takich trójek. Gdyby dwie spośród liczb x, y, z były parzyste, to trzecia też byłaby parzysta, bo suma oraz różnica liczb parzystych jest parzysta. Mamy $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4k(k+1)+1$, więc kwadrat liczby nieparzystej daje resztę jeden z dzielenia przez 4 (a nawet przez 8). Suma kwadratów dwóch liczb nieparzystych daje więc resztę 2 z dzielenia przez 4, więc nie jest kwadratem liczby parzystej. Oznacza to, że jedna z liczb x, y jest parzysta, a druga — nieparzysta, zaś liczba z jest nieparzysta.

Dla ustalenia uwagi przyjmiemy, że x jest liczbą nieparzystą, a y — parzystą. Wtedy $y^2 = z^2 - x^2 = (z-x)(z+x)$. Ponieważ $(z+x) - (z-x) = 2x$ jest liczbą parzystą, ale niepodzielną przez 4, więc jedna z liczb parzystych $z+x$, $z-x$ jest podzielna przez 4, a druga nie. Iloczyn jest więc podzielny przez 8, więc kwadrat liczby y jest podzielny przez 8, a to oznacza, że liczba y jest podzielna przez 4, więc iloczyn xyz też jest podzielny przez 4.

Mamy $(3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3k(3k+2)+1$ oraz $(3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$, więc wykazaliśmy, że resztą z dzielenia przez 3 kwadratu liczby całkowitej niepodzielnej przez 3 jest 1. Wynika stąd, że jedna z liczb x, y dzieli się przez 3, a druga nie. Również z przez 3 podzielna nie jest. Tak czy inaczej iloczyn xyz jest podzielny przez 3.

Mamy $(5k+1)^2 = 25k^2 + 10k + 1 = 5(5k^2 + 2k) + 1$, więc jeśli liczba daje z dzielenia przez 5 resztę 1, to jej kwadrat daje z dzielenia przez 5 resztę 1.

$(5k+2)^2 = 25k^2 + 20k + 4 = 5(5k^2 + 4k) + 4$, więc jeśli liczba daje z dzielenia przez 5 resztę 2, to jej kwadrat daje z dzielenia przez 5 resztę 4.

$(5k+3)^2 = 25k^2+30k+3 = 5(5k^2+6k+1)+4$, więc jeśli liczba daje z dzielenia przez 5 resztę 3, to jej kwadrat daje z dzielenia przez 5 resztę 4.

$(5k+4)^2 = 25k^2+40k+16 = 5(5k^2+8k+3)+1$, więc jeśli liczba daje z dzielenia przez 5 resztę 4, to jej kwadrat daje z dzielenia przez 5 resztę 1.

Widać że możliwe jest, aby kwadrat jednej z liczb x, y dawał z dzielenia przez 5 resztę 1, a drugiej resztę 4 i wtedy liczba z jest podzielna przez 5. Oczywiście może zdarzyć się, że jedna z liczb x, y jest podzielna przez 5, a kwadrat drugiej daje resztę 1 lub 4, taką samą, jak kwadrat liczby z, ale we wszystkich takich sytuacjach iloczyn xyz dzieli się przez 5 bez reszty.

Udowodniliśmy, że liczba xyz jest podzielna przez 4, 3 i 5, więc jest podzielna przez $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

13. Dane są takie liczby całkowite a i b, że $2a^2+a = 3b^3+b$. Udowodnić, że liczby $a-b$ oraz $2a+2b+1$ są kwadratami liczba całkowitych,

Rozwiązanie: Mamy $b^2 = 2a^2+a-2b^2-b = (a-b)(2a+2b+1)$. Jeśli liczba pierwsza p dzieli liczby $a-b$ i $2a+2b+1$, to dzieli też liczbę b oraz liczbę

$$\big(2a+2b+1-2(a-b)\big) - 4b = 4b+1-4b = 1\,,$$

więc nie ma takiej liczby pierwszej. Stąd i z równości $b^2 = (a-b)(2a+2b+1)$ wynika, że każdy czynnik pierwszy liczby $a-b$ pojawia się w jej rozkładzie na czynniki pierwsze tyle samo razy ile w rozkładzie liczby b^2 na czynniki pierwsze, więc w parzystej potędze. To samo można powiedzieć o czynnikach pierwszych liczby $2a+2b+1$. Czy to koniec zadania?

Ależ skąd! Przecież nie wiemy, czy liczba $a-b$ jest nieujemna! To trzeba wykazać i to korzystając z całkowitości liczb a, b, bo bez trudu można znaleźć liczby **rzeczywiste**, dla których spełniona jest równość $2a^2 + a = 3b^2 + b$ oraz $a < b$, np. $b = 1$, $a = -\frac{1}{4}(1+\sqrt{33})$.

Załóżmy, że $a - b < 0$, więc że istnieją takie liczby całkowite k, ℓ, że

$$a - b = -k^2 \quad \text{i} \quad 2a+2b+1 = -\ell^2\,. \tag{1}$$

Liczba $3b^2+b = b(3b+1)$ jest parzysta, więc liczba $2a^2+a$ też jest parzysta zatem liczba a jest parzysta. Z równań (1) wynika, że $a = \frac{1}{4}\left(-2k^2 - \ell^2 - 1\right)$. Ponieważ a jest liczbą całkowitą, więc liczba ℓ jest nieparzysta. Istnieje więc taka liczba całkowita n, że $\ell = 2n+1$. Wobec tego $a = \frac{1}{4}\left(-2k^2 - 4n(n+1) - 2\right)$. Stąd wynika, że k

jest liczbą nieparzystą, więc istnieje taka liczba całkowita m, że $k = 2m+1$. Wobec tego $a = \frac{1}{4}\big(-2(4m^2+4m+1) - 4n(n+1) - 2\big) = = -2m^2 - 2m - n(n+1) - 1$, co oznacza, że liczba a jest nieparzysta, wbrew wcześniejszym ustaleniom. Założenie $a < b$ doprowadziło do sprzeczności, więc $a - b \geq 0$. Dowód został zakończony. ■

Oczywiście druga część dowodu jest trudniejsza od pierwszej.

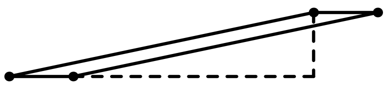
14. Udowodnić wzór na pole równoległoboku korzystając z wzoru na pole prostokąta.

W zdecydowanej większości znanych mi podręcznków dowód jest niekompletny, chodzi o pełny dowód obejmujący wszystkie przypadki.

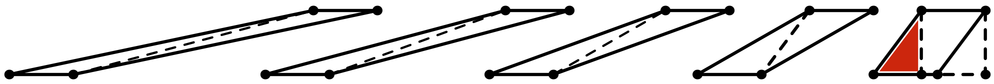
Rozwiązanie:

Rozwiązanie:

Tak wygląda wyprowadzenie wzoru w wielu podręcznikach szkolnych.

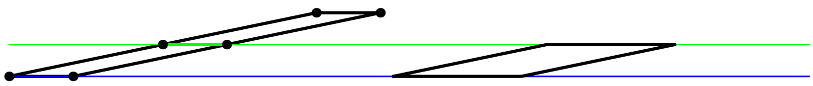


A tak wygląda problem: po przełożeniu trójkąta nie otrzymujemy prostokąta.

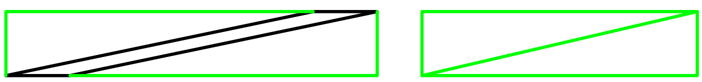


A na tym rysunku widać jak po kilku przełożeniach trójkąta z prawej na lewą stronę otrzymujemy równoległobok, dla którego podręcznikowe wyprowadzenie wzoru działa. Te operacje nie zmieniają ani pola równoległoboku, ani podstawy, ani wysokości. To dowodzi, że wzór działa również w sytuacjach pomijanych w szkolnym wyprowadzeniu tej formuły.

Można postępować nieco inaczej. Np. można zbyt wydłużony równoległobok przeciąć w połowe wysokości prostą równoległą do podstawy, a następnie przełożyć górną część tak, by otrzymać dwa razy niższy równoległobok o dwa razy dłuższej podstawie. Ta operacja nie zmienia pola równoległoboku, ani iloczynu podstawy przez wysokość. Powtarzając ją odpowiednią liczbę razy dochodzimy do równoległoboku, w którym szkolne wyprowadzenie wzoru działa.



I jeszcze metoda zwalczenia problemu. Obudowujemy równoległobok prostokątem P tak, by dłuższa przekątna równoległogoku stała się przekątną prostokąta i by podstawy równoległoboku zawierały się w bokach prostokąta.



Z dodanych trójkątów prostokątnych można złożyć prostokąt R, o wysokości równej wysokości równoległoboku i prostokąta P. Suma pól równoległoboku i prostokąta R

jest równa polu prostokąta P. Suma podstaw równoległoboku i prostokąra R jest równa podstawie prostokąta P. Stąd wynika wzór na pole równoległoboku.

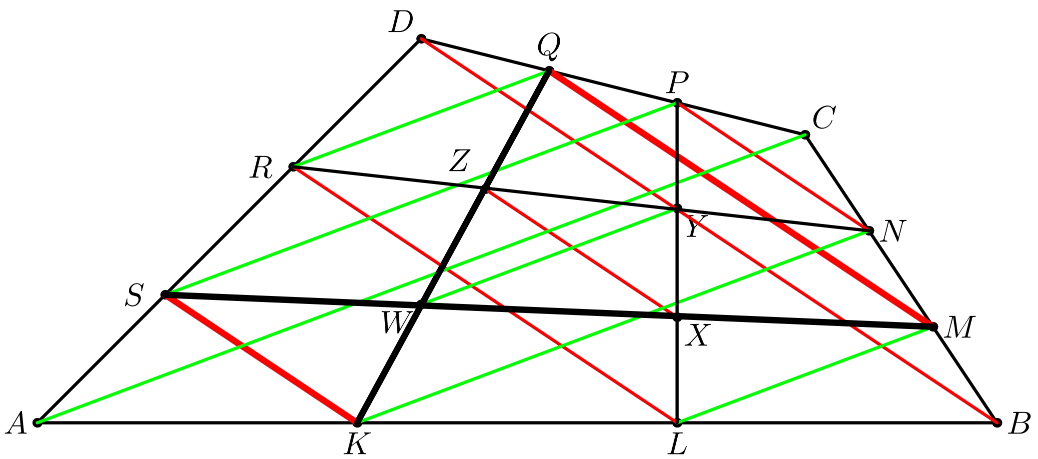
15. Udowodnić wzór na pole trapezu.

Rozwiązanie: Z dwóch trapezów składamy w zwykły sposób równoległobok i korzystany z poprzedniego zadania. Tak samo wyprowadzamy wzór na pole trójkąta.

16. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L, M i N, P i Q, R i S dzielą kolejno każdy z boków AB, BC, CD i DA na równe części i pojawiają się na nich w podanej kolejności. Wykazać, że odcinki KQ i LP są podzielone odcinkami MS i NR na równe części oraz że pole środkowego z powstałych dziewięciu czworokątów jest równe $\frac{1}{9}$ pola czworokąta $ABCD$. Podać przykład świadczący o tym, że pola dziewięciu czworokątów mogą być różne, chociaż suma pól trzech z nich "tworzących grubą przekątną" jest równa $\frac{1}{3}$ pola czworokąta $ABCD$.

A jak można fizycznie uzasadnić pierwszą część tezy?

Rozwiązanie:



Oznaczmy W, X, Y, Z punkty przecięcia prostych KQ i SM, LP i SM, LP i NR oraz QK i NR. Z twierdzenia Talesa wynika, że odcinki SK i RL są równoległe do przekątnej DB. To samo dotyczy odcinków PK i QM. Dodatkowo spełnione są równości $SK = \frac{1}{3}DB = PK$ oraz $RL = \frac{2}{3}DB = QM$. Stąd wynika łatwo, że trójkąty SWK i MWQ są podobne oraz że boki trójkąta MWQ są dwukrotnie dłuższe od swych odpowiedników w drugim trójkącie. Wobec tego $WK = \frac{1}{3}QK$ i $SW = \frac{1}{3}SM$. Analogiczne rozumowanie przekonuje nas o tym, że $LX = \frac{1}{3}LP$, $MX = \frac{1}{3}SM$, $NY = \frac{1}{3}NR$, $PY = \frac{1}{3}PL$, $QZ = \frac{1}{3}QK$ i $RZ = \frac{1}{3}RN$. Wobec tego trójkąt KWS przystaje do trójkąta ZWX i $ZX = KS = \frac{1}{3}BD$ i $ZX \parallel KS \parallel BD$. Analogicznie $WY \parallel AC$ i $WY = \frac{1}{3}AC$. Stąd wynika, że pole trójkąta $WXYZ$ jest równe $\frac{1}{9}$ pola trójkąta $ABCD$. Wynika stąd też, że suma pól trójkątów SWK i PYN jest równa polu czworokąta $WXYZ$, więc jest równe $\frac{1}{9}$ pola czorokąta $ABCD$. Pole trójkąta SAK to $\frac{1}{9}$ pola trójkąta DAB, a pole trójkąta CPN to

$\frac{1}{9}$ pola trójkąta CDB. Wobec tego suma pól trójkątów SAK i CPN to $\frac{1}{9}$ pola czwoorkąta $ABCD$. Z tego wszystkiego wynika, że suma pól czworokątów $SAKW$, $WXYZ$ i $CPYN$ jest równa $\frac{1}{3}$ pola czworokąta $ABCD$. Zadanie zostało rozwiązane.

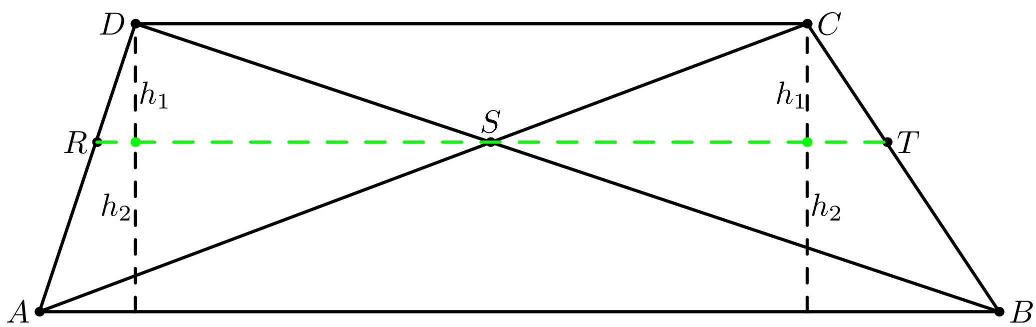
Dodajmy jeszcze, że można je rozwiązać „fizycznie". Umieszczamy w punkcie A masę 4, w każdym z punktów B i D — masę 2, a w punkcie C — masę 1. Wtedy środkiem masy pary punktów A, B jest punkt K, środkiem masy pary punktów D, C jest punkt Q. W punkcie K umieszczamy masę $4 + 2 = 6$, a w punkcie Q — masę $2 + 1 = 3$. Wtedy środkiem masy czwórki punktów A, B, D i C z tymi masami jest środek masy pary punktów K, Q, w których znajdują się masy 6 i 3 jest taki punkt E leżący na odcinku KQ, że $\frac{KE}{EQ} = 2$, więc $E = W$. Można też zauważyć, że S jest środkiem masy pary punktów A i D, a M środkiem masy pary punktów B i C. Umieszczając masę $4 + 2 = 6$ w punkcie S, a masę $2 + 1 = 3$ w punkcie M stwierdzamy, że środek masy czwórki punktów A, D, B i C, czyli W, dzieli odcinek SM w stosunku $2 : 1$.

17. Uogólnić twierdzenie z poprzedniego zadania: rozpatrzeć podziały boków na większą liczbę równych części.

Rozwiązanie: W dużym skrócie: dzielimy każdy bok czworokąta na nieparzystą liczbę równych części. Jeśli n jest liczbą tych części, to pole „środkowego" czworokąta jest równe $\frac{1}{n^2}$ razy pole czworokąta $ABCD$, a suma pól czworokątów na pogrubionej przekątnej to $\frac{1}{n}$ pola czworokąta $ABCD$. Dowód jest w pełni analogiczny do rozumowania przeprowadzonego w rozumowaniu z poprzedniego zadania.

18. Udowodnić, że boki AB i CD czworokąta wypukłego $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie S, są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy pola trójkątów ADS i BCS są równe.

Rozwiązanie: Jeśli pola trójkątów ADS i CBS są równe, to również powiększone o pole trójkąta ABS są równe, a to oznacza, że pola trójkątów ABD i ABC są równe.



Wynika stąd, że wyskości tych trójkątów prostopadłe do wspólnego ich boku AB są równe, więc punkty D i C są równoodległe od prostej AB i leżą po jednej jej stronie. Dowód w drugą stronę polega na odwrócenie tego rozumowania.

19. Niech czworokąt wypukły $ABCD$ będzie trapezem o podstawach AB i CD, a S punktem przecięcia jego przekątnych. Niech R, T będą takimi punktami ramion AD i BC, że odcinek RT jest równoległy do podstaw trapezu $ABCD$ i zawiera punkt S. Udowodnić, że S jest środkiem odcinka RT.

Rozwiązanie: Niech h_1 będzie odległością prostych CD i TR, a h_2 — odległością prostych TR i BA. Wtedy pole trójkąta ASD jest równe

$$\tfrac{1}{2}RS \cdot h_1 + \tfrac{1}{2}RS \cdot h_2 = \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2) \cdot RS\,.$$

Analogicznie pole trójkąta BCS jest równe $\frac{1}{2}(h_1 + h_2) \cdot ST$. Z równości tych pól wynika, że $RS = ST$.

20. Przyjmujemy oznaczenia z poprzedniego zadania oraz $a = AB$ i $b = CD$. Wyrazić długość odcinka RT za pomocą a i b. Znaleźć stosunki pól trójkątów ABS, BCS, CDS i DAS do pola trapezu $ABCD$.

Rozwiązanie: Niech, jak w poprzednim zadaniu h_1 będzie wysokością trójkąta CDS, a h_2 — wysokością trójkąta ABS. Niech $h = h_1 + h_2$ będzie wysokością trapezu $ABCD$. Ponieważ trójkąt CDS jest podobny do trójkąta ABS, więc $\frac{h_1}{h_2} = \frac{b}{a}$. Stąd wynika, że $h_1 = \frac{bh_2}{a}$, zatem $h = \frac{bh_2}{a} + h_2 = h_2\frac{b+a}{a}$, więc $h_2 = \frac{ah}{a+b}$ i wobec tego $h_1 = \frac{bh}{a+b}$. Wobec tego pole trójkąta ABS jest równe $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{ah}{a+b} = \frac{a^2h}{2(a+b)}$, a pole trójkąta CDS jest równe $\frac{b^2h}{2(a+b)}$. Wobec tego suma pól trójkątów DAS i BCS jest równa

$$\tfrac{(a+b)h}{2} - \tfrac{a^2h}{2(a+b)} - \tfrac{b^2h}{2(a+b)} = \tfrac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2(a+b)} \cdot h = \tfrac{abh}{a+b}.$$

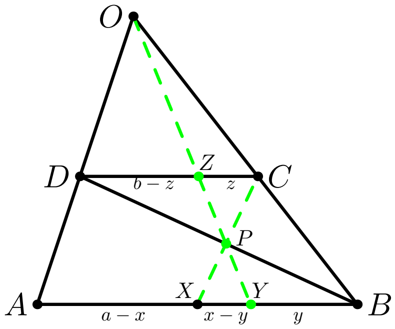
Pola tych trójkątów są równe, więc każde z nich to $\frac{abh}{2(a+b)}$, a z drugiej strony to pole jest równe $\frac{1}{2}RSh_2 + \frac{1}{2}RSh_1 = \frac{1}{2}RS(h_2 + h_1) = \frac{1}{2}RS \cdot h$. Stąd wynika, że $\frac{abh}{2(a+b)} = \frac{1}{2}RS\cdot h$, więc $RS = \frac{ab}{a+b}$, zatem $RT = 2RS = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Udowodniliśmy, że odcinek RT jest średnią harmoniczną podstaw trapezu. Możemy więc napisać, że:
stosunek pola trójkąta ABS do pola trapezu to $\frac{a^2h}{2(a+b)} : \frac{h(a+b)}{2} = \frac{a^2}{(a+b)^2}$;
stosunek pola trójkąta CDS do pola trapezu to $\frac{b^2h}{2(a+b)} : \frac{h(a+b)}{2} = \frac{b^2}{(a+b)^2}$;
stosunek pola trójkąta BCS do pola trapezu to $\frac{abh}{2(a+b)} : \frac{h(a+b)}{2} = \frac{ab}{(a+b)^2}$.

21. Przyjmujemy oznaczenia z poprzedniego zadania i zakładamy dodatkowo, że $a > b$. Niech O oznacza punkt wspólny prostych AD i BC. Niech M będzie punktem wspólnym prostych SO i AB. Udowodnić, że M jest środkiem odcinka AB.

Niech N będzie punktem wspólnym prostych MC i BD, a M_1 — punktem wspólnym prostych ON i AB. Udowodnić, że $\frac{M_1B}{AB} = \frac{1}{3}$.

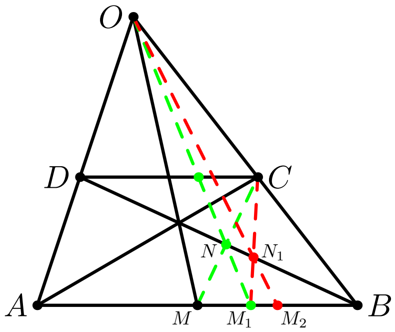
Niech N_1 będzie punktem wspólnym prostych M_1C i BD, a M_2 — punktem wspólnym prostych ON_1 i AB. Udowodnić, że $\frac{M_2B}{AB} = \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie: Załóżmy, że punkt X leży na odcinku AB w odległości $x < a$ od punktu B, więc w odległości $a - x > 0$ od punktu A. Niech P będzie punktem wspólnym prostych BD i XC.



Niech Y będzie punktem wspólnym prostych OP i AB, a Z — prostych OP i CD. Niech $y = BY$ i $z = ZC$. Trójkąty BYP oraz DZP są podobne. Również trójkąty XYP oraz CZP są podobne. Wobec tego możemy napisać: $\frac{y}{b-z} = \frac{YP}{ZP} = \frac{x-y}{z}$ i dalej $\frac{z}{b-z} = \frac{x-y}{y}$. Z podobieństwa trójkątów CZO i BYO oraz DZO i AYO wynikają równości: $\frac{y}{z} = \frac{YO}{ZO} = \frac{a-y}{b-z}$, zatem $\frac{z}{b-z} = \frac{y}{a-y}$. Z otrzymanych równości wnioskujemy, że $\frac{x-y}{y} = \frac{z}{b-z} = \frac{y}{a-y}$, więc $(x-y)(a-y) = y^2$. Po wymnożeniu i redukcji: $ax - y(a+x) = 0$, zatem $y = \frac{ax}{a+x}$. Udowodniliśmy, że

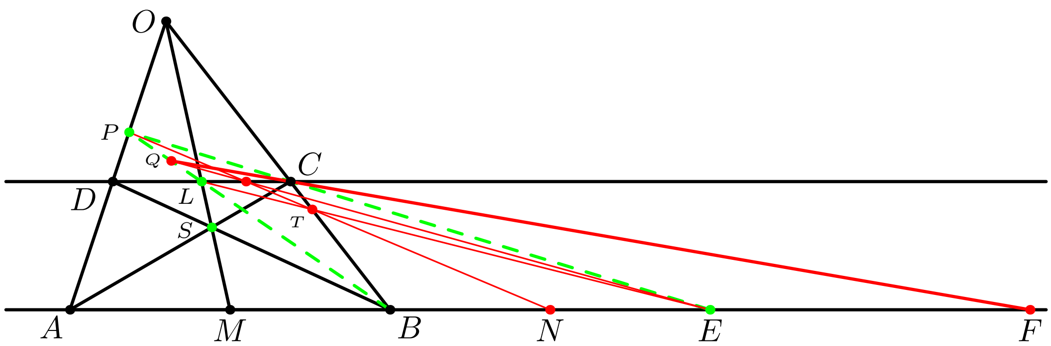
$$\text{jeśli } x = XB,\text{ to } y = YB = \frac{ax}{a+x}. \tag{*}$$



Przyjąwszy w równości (*) $X = M$ otrzymujemy $M_1 = Y$, więc $M_1B = \frac{a\cdot\frac{a}{2}}{a+\frac{a}{2}} = \frac{a^2}{3a} = \frac{a}{3}$. Przyjąwszy w równości (*) $X = M_1$, czyli $x = \frac{a}{3}$, otrzymujeny $M_2B = y = \frac{a\cdot\frac{a}{3}}{a+\frac{a}{3}} = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4}$. Postępowanie można powtarzać. Otrzymujemy kolejne równości $\frac{a\cdot\frac{a}{4}}{a+\frac{a}{4}} = \frac{a^2}{5a} = \frac{a}{5}$, $\frac{a\cdot\frac{a}{5}}{a+\frac{a}{5}} = \frac{a^2}{6a} = \frac{a}{6}$, itd. Okazało się, że mając odcinek AB i prostą do niego równoległą możemy znaleźć odcinki o długościach $\frac{1}{2}AB$, $\frac{1}{3}AB$, $\frac{1}{4}AB$, $\frac{1}{5}AB$, $\frac{1}{6}AB$, itd. używając jedynie linijki bez podziałki (cyrkiel nie jest nam potrzebny!).

22. Dane są proste równoległe ℓ i m. Na prostej ℓ dany jest odcinek AB. Skonstruować za pomocą samej linijki (bez podziałki) odcinek trzy razy dłuższy od odcinka AB.

Rozwiązanie: Wybieramy punkt O po przeciwnej stronie prostej m niż prosta ℓ.



Punkty przecięcia prostych OA i OB z prostą m oznaczamy odpowiednio przez D i C. Oznaczamy przez S punkt przecięcia przekątnych -trapezu $ABCD$. Punkty L i M, w których prosta OS przecina odcinki CD i AB są ich środkami (zob. poprzednie zadanie). Niech P będzie punktem wspólnym prostych BL i OA, a E punktem wspólnym prostych AB i PC. Z podobieństw trójkątów DLP i ABP

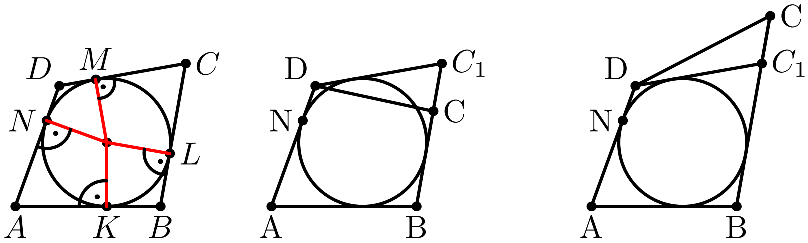
oraz CLP i EBP wynika, że $\frac{DL}{AB} = \frac{LP}{BP} = \frac{CL}{EB}$. Ponieważ $DL = CL$, więc również $AB = EB$. Odłożyliśmy odcinek AB na półprostej $AB^{\rightarrow}$ zaczynając od punktu B.

Powtarzamy konstrukcję jeszcze raz (czerwone linie) odkładając odcinek BE na półprostej $BE^{\rightarrow}$ zaczynając od punktu E. Zamiast trapezu $ABCD$ mamy do czynienia z trapezem $BECL$, którego przekątne BC i EL przecinają się w punkcie T, a przedłużenia ramion — w punkcie Q. Koniec najnowszego odcinka oznaczamy przez F. Jasne jest, że $AF = 3AB$.

Jasne jest, że możemy odłożyć odcinek AB na prostej ℓ dowolnie wiele razy.

23. Wykazać, że w czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $AB + CD = BC + DA$.

Rozwiązanie: Trzeba wykazać dwa wynikania. Załóżmy najpierw, że w czworokąt $ABCD$ wpisano okrąg i oznaczmy przez K, L, M, N punkty styczności okręgu z bokami AB, BC, CD i DA danego czworokąta.



Wtedy $AK = AN$, bo odcinki stycznych z punktu A do okręgu są równe. Podobnie $BK = BL$, $CL = CM$ i $DM = DN$. Stąd wynika, że

$$AB + CD = AK + KB + CM + MD = AN + BL + CL + DN =$$
$$= AN + DN + BL + CL = AD + BC.$$

Twierdzenie zostało udowodnione w jedną stronę.

Załóżmy teraz, że w czworokącie wypukłym $ABCD$ spełniony jest warunek $AB + CD = BC + DA$. Punkt O, w którym przecinają się dwusieczne kątów $\sphericalangle DAC$ i $\sphericalangle ABC$ jest środkiem okręgu T stycznego do prostej AB i półprostych $AD^{\rightarrow}$ oraz $BC^{\rightarrow}$ w punktach K, N i L. Jeśli odcinek DC jest styczny, do okręgu T, to znaleźliśmy okrąg wpisany w czworokąt $ABCD$. Jeśli nie jest styczny, to albo przecina okrąg T w dwóch punktach, albo nie przecina go wcale.

Załóżmy, że odcinek DC ma dwa punkty wspólne z okręgiem T. Zauważmy, że z nierówności $AD + BC = AB + CD > AB$ wynika, że $BC > BL$ lub $AD > AN$.* Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $AD > AN$. Poprowadźmy z punktu D styczną do T, różną od DA. Przecina ona półprostą $BC^{\rightarrow}$ w pewnym punkcie C_1. W opisanej sytuacji odcinek DC jest zawarty w czworokącie ABC_1D. Z już udowodnionej części twierdzenia wynika równość $AB + C_1D = BC_1 + DA$. Odejmując od niej stronami równość $AB + CD = BC + DA$ otrzymujemy $C_1D - CD = BC_1 - BC = C_1C$,

---

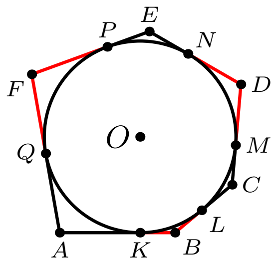
*spójnik „lub” oznacza, że spełniona jest co najmniej jedna z tych nierówności, mogą być też spełnione obie.

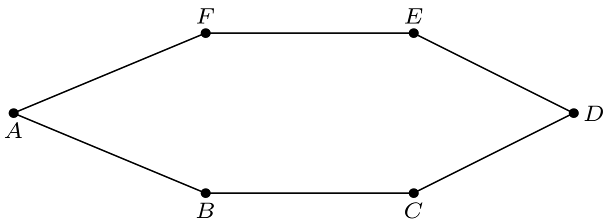
czyli $C_1D = CD + CC_1$ przeczącą temu, że punkty C_1, C i D **nie** leżą na jednej prostej. Wobec tego odcinek CD nie może mieć dwóch punktów wspólnych z okręgiem T.

Załóżmy, że odcinek CD nie ma ani jednego punktu wspólnego z okręgiem T. Poprowadźmy z punktu D styczną do okręgu T, różną od DA. Przecina ona półprostą $BC^{\to}$ w pewnym punkcie C_1. W opisanej sytuacji odcinek DC_1 jest zawarty w czworokącie $ABCD$. Z już udowodnionej części twierdzenia wynika równość $AB+C_1D = BC_1+DA$. Odejmując od niej stronami równość $AB+CD = BC+DA$ otrzymujemy $C_1D - CD = BC_1 - BC = -C_1C$, czyli $CD = C_1D + C_1C$ przeczącą temu, że punkty C_1, C i D **nie** leżą na jednej prostej. Wobec tego odcinek CD nie musi mieć punkt wspólny z okręgiem T, a ponieważ nie może mieć dwóch punktów wspólnych, więc ma dokładnie jeden.

24. Wykazać, że jeśli w sześciokąt wypukły $ABCDEF$ można wpisać okrąg, to $AB + CD + EF = BC + DE + FA$. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

Rozwiązanie: Załóżmy, że okrąg wpisany w sześciokąt $ABCDEF$ jest styczny do kolejnych boków w punktach K, L, M, N, P, Q, punkt K leży na boku AB itd. Ponieważ odcinki stycznych do okręgu poprowadzonych z jednego punktu są równe, więc: $AQ = AK$, $BK = BL$, $CL = CM$, $DM = DN$, $EN = EP$ i $FP = FQ$.





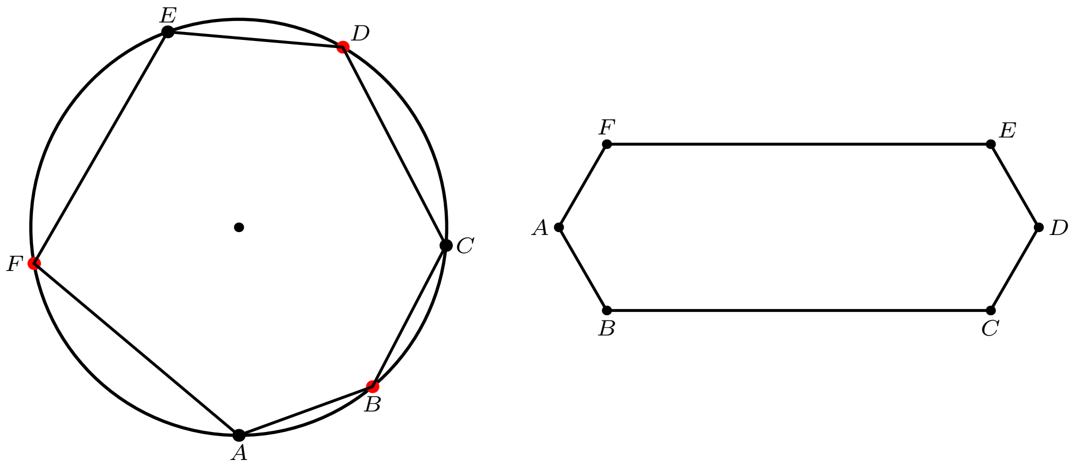
Wobec tego $AB + CD + EF =$
$= AK + KB + CM + MD + EP + PF = AQ + BL + CL + DN + EN + FQ =$
$= AQ + FQ + BL + CL + DN + EN = AF + BC + DE$, więc twierdzenie zostało udowodnione. Twierdzenie odwrotne prawdziwe nie jest. Wystarczy „rozciagnąć" sześciokąt foremny w jedną stronę i „ścisnąć" go w kierunku prostopadłym. Można np. przyjrzeć się sześciokątowi o wierzchołkach $A = (0,0)$, $B = (12,-5)$, $C = (25,-5)$, $D = (37,0)$, $E = (25,5)$ i $F = (12,5)$. Jego boki są równe 13. Jasne jest, że jeśli okrąg ma być styczny do boków BC i EF, to środek okręgu musi leżeć na osi OX, a promieniem musi być liczba 5. Taki sam argument można zastosować do boków CD i FA, również równoległych. Jednak odległość prostych, na których leżą te dwa boki jest równa $\frac{185}{13}$, więc promieniem okręgu musiałaby być liczba $\frac{185}{26} > 7$. Wobec tego w ten sześciokąt okręgu wpisać nie można, choć warunek jest spełniony.

Komentarz. Rozwiązanie tego zadania niczym istotnym od rozwiązania zadania dla czworokąta nie różni się. Jedna twierdzenie odwrotne jest nieprawdziwe, a dla czworokąta jest prawdziwe. Autor tekstu uważa, że to dobrze ilustruje różnicę między twierdzeniem prostym i odwrotnym. Przykład nie jest sztuczny nie jest też trudny.

25. Sformułować i udowodnić odpowiednie twierdzenie dla sześciokąta, na którym można opisać okrąg.

Rozwiązanie: W tym rozwiązaniu mówiąc o łuku XYZ, będziemy zawsze mieć na myśli ten z dwóch łuków okręgu wyznaczonych przez punkty X i Z, na którym leży punkt Y.

Załóżmy, że wierzchołki sześciokąta $ABCDEF$ leżą na pewnym okręgu. Wtedy kąt $\sphericalangle FAB$ jest oparty na łuku BCF, kąt $\sphericalangle BCD$ — na łuku DEB, kąt $\sphericalangle DEF$ — na łuku FAD.



Suma długości tych łuków równa jest podwojonej długości okręgu, zatem suma kątów $\sphericalangle FAB$, $\sphericalangle BCD$ i $\sphericalangle DEF$ jest równa $360°$. Oznacza to, że suma trzech pozostałych kątów też jest równa $360°$, bo suma wszystkich kątów sześciokąta jest równa $4 \cdot 180° = 720°$. Wobec tego udowodniliśmy, że
jeśli na sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ można opisać okrąg, to suma kątów o wierzchołkach A, C, E jest równa sumie kątów o wierzchołkach B, D, F (obie równe $360°$).

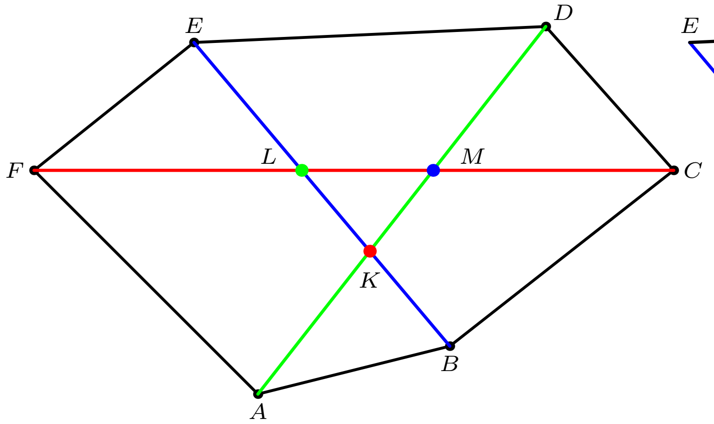
Twierdzenia tego nie można odwrócić. Istnieje przecież sześciokąt, którego wszystkie kąty są równe $120°$, a kolejne boki mają długości $1, 4, 1, 1, 4, 1$ — wyciągnięty w jednym kierunku sześciokąt foremny, a trzy niewspóliniowe punkty wyznaczają okrąg.

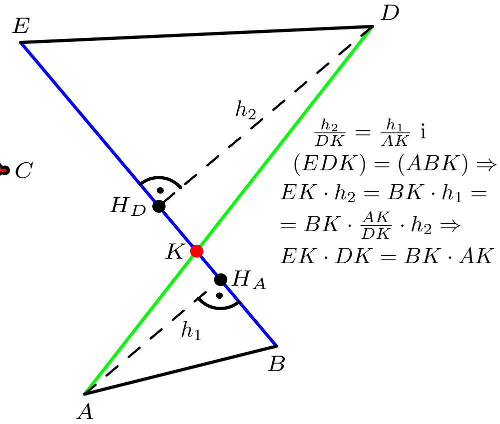
26. Każda z przekątnych AD, BE i CF dzieli na połowy pole sześciokąta wypukłego $ABCDEF$. Dowieść, że te przekątne przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie: W tym rozwiązaniu symbol (XYZ) oznacza pole trójkąta XYZ, $(WXYZ)$ — pole czworokąta $WXYZ$ itd.

Załóżmy, że te przekątne nie przecinają się w jednym punkcie i oznaczmy: przez K

punkt wspólny odcinków AD i BE, przez L punkt wspólny odcinków BE i CF, a przez M punkt wspólny odcinków CF i AD. Jeśli $K=L$, to ten punkt leży na prostych AD, BE i CF, zatem jako punkt wspólny prostych AD i CF pokrywa się z M, więc albo $K=L=M$, albo $K\neq L\neq M\neq K$. W tym drugim przypadku punkty K,L,M są wierzchołkami trójkąta, czyli nie leżą na jednej prostej (prosta BE pokrywa się z prostą KL, prosta AD — z KM, CF — z LM). Wykażemy, że $K=L=M$.





Załóżmy, że tak nie jest. Mamy (rysunek z lewej strony)

$$(AKB)+(KBCD)=(ABCD)=\tfrac{1}{2}(ABCDEF).$$

$$(EKD)+(KBCD)=(BCDE)=\tfrac{1}{2}(ABCDEF).$$

Stąd wynika, że $(AKB)=(EKD)$. Stąd wnioskujemy (rysunek z prawej strony), że $AK\cdot BK=EK\cdot DK$ — kąty między bokami AK i BK oraz EK i DK są równe, więc z równości pól trójkątów wynika równość iloczynów ramion tych kątów. W taki sam sposób dowodzimy, że $BM\cdot CM=EM\cdot FM$ oraz $CL\cdot DL=AL\cdot FL$. Mnożąc otrzymane trzy równości stronami otrzymujemy równość

$$AK\cdot BK\cdot CL\cdot DL\cdot EM\cdot FM=DK\cdot EK\cdot FL\cdot AL\cdot BM\cdot CM. \qquad (*)$$

Dla ustalenia uwagi załóżmy, że punkt L leży między A i K. Wtedy M leży między K i B. Równość (*) można wtedy napisać w postaci

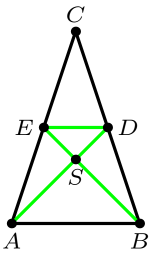
$$(AL+LK)\cdot(BM+MK)\cdot(CM+ML)\cdot(DK+KL)\cdot(EK+KM)\cdot(FL+LM)=$$
$$=AL\cdot BM\cdot CM\cdot DK\cdot EK\cdot FL.$$

Z niej wynika, że $LK=MK=ML=0$, więc $K=L=M$.

Gdy punkt K leży między A i L analogiczne rozumowanie prowadzi do wniosku, że $K=L=M$. Zadanie zostało rozwiązane.

Uwaga. Z równości pól trójkątów AKB i DKE wynika, że $AE\parallel BD$, więc czworokąt $ABDE$ jest trapezem. To rozumowanie można też kontynuować, by otrzymać inne rozwiązanie zadania, trochę trudniejsze — zdaniem autora tego tekstu.

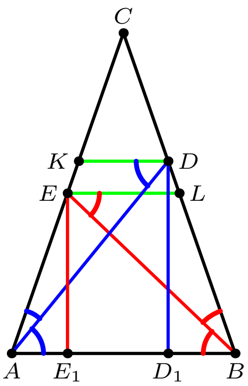
27. Udowodnić, że jeśli środkowe m_A i m_B trójkąta ABC są równe, to $BC = AC$.
Rozwiązanie:



Niech D będzie środkiem boku BC, a E — środkiem odcinka AC i niech S będzie punktem wspólnym środkowych AD i BE. Mamy $AS = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}BE = BS$. Również $DS = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3}BE = ES$. Wynika stąd, że trójkąty BSD i ASE są przystające (cecha bkb). Stąd wynika, że zachodzi równość $CB = 2DB = 2EA = CA$, a to właśnie chcieliśmy dowieść.

28. Udowodnić, że jeśli wysokości h_A i h_B trójkąta ABC są równe, to $BC = AC$.
Rozwiązanie: Pole trójkąta można obliczać co najmniej dwoma sposobami: $\frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_A = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h_B$. Z założenia i z napisanego wzoru wynika natychmiast: $BC = AC$.

29. Udowodnić, że jeśli dwusieczne d_A i d_B trójkąta ABC są równe, to $BC = AC$.
Rozwiązanie: Tym razem trzeba będzie trochę popracować. Niech AD i BE będą dwusiecznymi, zakładamy punkt D leży na boku BC, punkt E na boku AC. Niech D_1 i E_1 oznaczają rzuty prostokątne punktów D i E na prostą AB. Jeśli $DD_1 = EE_1$, to trójkąty ADD_1 i BEE_1 są przystające jako prostokątne o równych przeciwprostokątnych i jednej przyprostokątnej. Stąd wynika, że $\sphericalangle DAB = \sphericalangle EBA$, więc również $\sphericalangle CAB = 2\sphericalangle DAB = 2\sphericalangle EBA = \sphericalangle CBA$, a stąd równość $AC = BC$.



Załóżmy teraz, że $DD_1 \neq EE_1$, np. $DD_1 > EE_1$. Niech K będzie takim punktem odcinka AC, że $KD \parallel AB$, a L — takim punktem odcinka BC, że $LE \parallel BA$. Ponieważ $DD_1 > EE_1$, więc $KD < LE$. Trójkąty BEL i ADK są równoramienne, bo $\sphericalangle LEB = \sphericalangle ABE = \sphericalangle LBE$ i $\sphericalangle KDA = \sphericalangle BAD = \sphericalangle KAD$. Z nierówności $DD_1 > EE_1$ i równości $AD = BE$ wynika, że

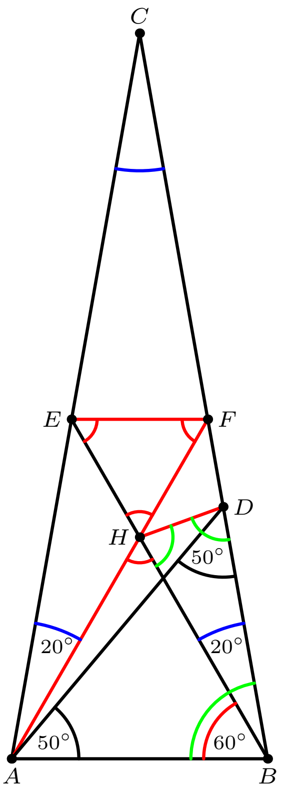
$$\sphericalangle ABE < \sphericalangle BAD. \qquad (\mathbf{1}).$$

Jednak z dwóch trójkątów równoramiennych o takiej samej podstawie dłuższe ramię ten, którego kąt przy podstawie jest większy, więc z nierówności $KD < LE$ wynika, że $\sphericalangle BAD = \sphericalangle KAD < \sphericalangle LBE = \sphericalangle ABE$. Otrzymaliśmy nierówność dokładnie przeciną do nierówności **(1)**, więc $DD_1 = EE_1$.

Uwaga: Zadanie można rozwiązać wieloma sposobami. Żaden znany autorowi tego tekstu nie jest bardzo prosty. Można np. użyć wzorów na długość dwusiecznej otrzymać rezultat po pewnej liczbie przekształceń algebraicznych. Wzór na długość dwusiecznej wygląda tak $d_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc(b+c-a)(b+c+a)}$, *jeśli ktoś chciałby tą drogą udowodnić twierdzenie.*

30. W trójkącie ABC oba kąty przy podstawie AB są równe $80°$. Punkt D leży na ramieniu BC a punkt E — na ramieniu AC. Zachodzą równości $\sphericalangle DAB = 50°$ i $\sphericalangle EBA = 60°$. Znaleźć kąt $\sphericalangle EDA$.

Rozwiązanie: Niech F będzie takim punktem odcinka BC, że $\measuredangle FAB = 60°$. Niech H oznacza punkt przecięcia odcinków AF i BE. Trójkąty ABH i HFE są równoboczne, gdyż wszystkie ich kąty wewnętrzne mają po $60°$. Zachodzą równości $\measuredangle ABD = 80°$ i $\measuredangle BAD = 50°$, więc $\measuredangle ADB = 50°$, zatem $AB = BD$ i w końcu $BH = AB = BD$. Wobec tego



$\measuredangle BDH = \measuredangle DHB = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle DBH) = \frac{1}{2}(180° - 20°) = 80°$. Stąd wynika, że $\measuredangle FHD = 180° - \measuredangle BHA - \measuredangle BHD = 180° - 60° - 80° = 40°$. Mamy też $\measuredangle HFD = \measuredangle AFB = 180° - \measuredangle BAF - \measuredangle ABF = 180° - 60° - 80° = 40°$. Wynika stąd, że trójkąt HDF jest równoramienny, dokładniej, że $HD = DF$. Ponieważ $EH = EF$, więc trójkąty EDH i EDF mają odpowiednio równe boki, zatem są przystające i odpowiednie ich kąty są równe, a to oznacza, że odcinek ED leży na dwusiecznych kątów $\measuredangle HEF = 60°$ i $\measuredangle HDF = 180° - 80° = 100°$. Zachodzi zatem równość $\measuredangle EDF = \frac{1}{2} \cdot 100° = 50°$. Wobec tego

$$\measuredangle EDA = 180° \measuredangle EDF - \measuredangle ADD = 180° - 50° - 50° = 80°.$$

Na tym rysunku łuki tego samego koloru oznaczają równe kąty: czerwony — $60°$, *niebieski* — $20°$, *zielony* — $80°$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego