KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązałem zadanie i co dalej?

Motto:

When working on a problem, I never think about beauty; I think only of how to solve the problem. But when I have finished, if the solution is not beautiful, I know that it is wrong.

— *R Buckminster Fuller (1895 - 1983)*

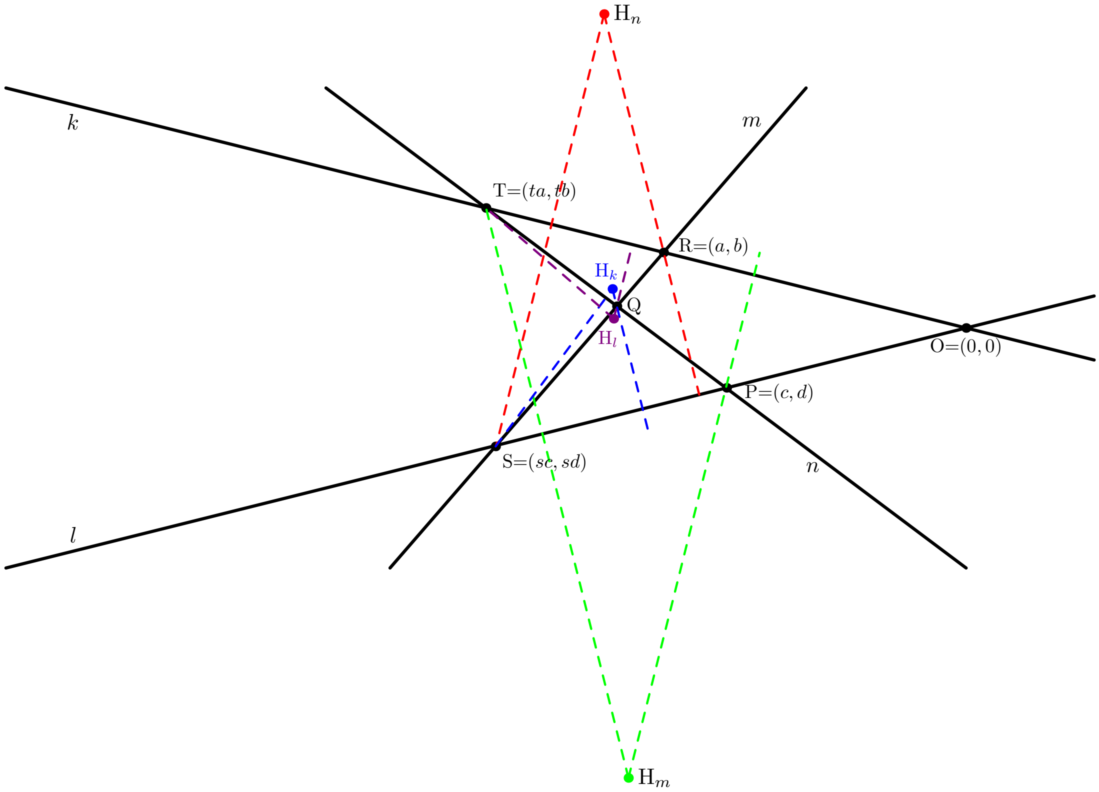
Z Encyklopedii Britannica: Fuller — architect, engineer, inventor, philosopher, author, cartographer, geometrician, futurist, teacher, and poet - established a reputation as one of the most original thinkers of the second half of the 20th century. He conceived of man as a passenger in a cosmic spaceship - a passenger whose only wealth consists in energy and information.

Dawno, dawno temu był pierwszy stopień XLIII OM. Przyszło mi sprawdzać zadanie 12. Brzmiało ono tak:
Na płaszczyźnie narysowane cztery proste tak, że żadne dwie z nich nie są równoległe i żadne trzy nie mają punktu wspólnego. Proste te wyznaczają cztery trójkąty. Udowodnić, że ortocentra tych trójkątów leżą na jednej prostej.

No to młodzież rozwiązywała. Wtedy były klasy „uniwersyteckie" w dwóch liceach w Warszawie: w LO im. S.S. i w LO im. K.H. Pamiętam, że z LO im. K.H. było sporo prac, których autorzy rozwiązywali to zadanie analitycznie. Nie skopiowałem żadnej takiej pracy, jedne były nieco krótsze, inne nieco dłuższe. Trzeba od razu stwierdzić, że w takim zadaniu geometria analityczna musi dać rozwiązanie w skończonym czasie, bo po napisaniu równań czterech prostych można rozwiązać układy równań liniowych i otrzymać punkty przecięcia prostych, więc wierzchołki trójkątów. Potem można napisać równania prostych zawierających wysokości trójkąta — to też wymaga jedynie czterech działań arytmetycznych. Znów rozwiązujemy układy równań liniowych, czyli znajdujemy ortocentra, potem piszemy równanie prostej która przechodzi przez dwa z nich i sprawdzamy, że pozostałe dwa też leżą na tej prostej.

Spróbowałem takie rozwiązanie napisać, aby mogli Państwo spojrzeć, co wtedy musiałem oceniać. Proste nazwiemy: k, l, m, n. Zakładamy, że proste k, l przecinają się w punkcie $O = (0, 0)$, proste k, m — w punkcie $R = (a, b)$, proste k, n

— w punkcie $T = (ta, tb)$, gdzie $t > 1$ jest pewną liczbą rzeczywistą, proste l, n — w punkcie $P = (c, d)$, proste l, m — w punkcie $S = (sc, sd)$, gdzie $s > 1$ jest pewną liczbą rzeczywistą. Wreszcie proste m, n przecinają się w punkcie Q, którego współrzędne znajdujemy rozwiązując układ równań:



$$\begin{cases} (b - sd)x + (sc - a)y = s(bc - ad) \\ (d - tb)x + (ta - c)y = t(ad - bc) \end{cases}$$

Otrzymujemy

$$x = \frac{cs(t-1) + at(s-1)}{st - 1}, \quad y = \frac{ds(t-1) + bt(s-1)}{st - 1},$$

czyli

$$Q = \left(\frac{cs(t-1) + at(s-1)}{st - 1}, \frac{ds(t-1) + bt(s-1)}{st - 1} \right).$$

Napisałem od razu wyniki, więc tracą Państwo przyjemność śledzenia kolejnych obliczeń ... Możemy znaleźć kolejne ortocentra. Zaczniemy od trójkąta OTP. Równania wysokości z wierzchołków P i T wyglądają tak:

$$\begin{cases} ax + by = ac + bd; \\ cx + dy = t(ac + bd)\,. \end{cases}$$

Wobec tego ortocentrum trójkąta OTP wygląda tak:

$$H_m = \frac{ac+bd}{bc-ad}\left(bt-d, c-at\right) ,$$

Oto równania dwu wysokości trójkąta ORS:

$$\begin{cases} ax+by = s(ac+bd); \\ cx+dy = ac+bd\,. \end{cases}$$

Ortocentrum trójkąta ORS wygląda tak:

$$H_n = \frac{ac+bd}{bc-ad}\left(b-ds, cs-a\right) ,$$

Oto równania wysokości trójkąta RTQ:

$$\begin{cases} ax+by = \dfrac{t(s-1)(a^2+b^2)+s(t-1)(ac+bd)}{st-1}; \\ (c-at)x+(d-bt)y = ac+bd-t(a^2+b^2)\,. \end{cases}$$

Ortocentrum trójkąta RTQ wygląda tak:

$$H_l = \left(\frac{(ac+bd)(ds-b-dst+bst^2)+(a^2+b^2)(bt+dt-dst-bt^2)}{(bc-ad)(st-1)},\right.$$
$$\left.\frac{(ac+bd)(a-cs+cst-ast^2)+(a^2+b^2)(cst-at-ct+at^2)}{(bc-ad)(st-1)}\right),$$

Ostatni trójkąt to PSQ. I znów piszemy równania dwu wysokości:

$$\begin{cases} cx+dy = \dfrac{s(t-1)(c^2+d^2)+t(s-1)(ac+bd)}{st-1}; \\ (c-at)x+(d-bt)y = s(c^2+d^2)-st(ac+bd)\,. \end{cases}$$

Ortocentrum trójkąta PSQ wygląda tak:

$$H_k = \left(\frac{(ac+bd)(d-bt+bst-ds^2t)+(c^2+d^2)(bst-bs-ds+ds^2)}{(bc-ad)(st-1)},\right.$$
$$\left.\frac{(ac+bd)(at-c-ast+cst^2)+(c^2+d^2)(as+cs-cs^2-ast)}{(bc-ad)(st-1)}\right),$$

Znaleźliśmy wszystkie cztery ortocentra. Napisać wypada równanie prostej wyznaczonej przez dwa z nich, np. przez pierwsze dwa. Bez długich rozważań piszemy

$$(at+cs-a-c)x+(bt+ds-b-d)y = \frac{(at+cs-a-c)(ac+bd)(bt-d)}{bc-ad}+$$
$$+\frac{(bt+ds-b-d)(ac+bd)(c-at)}{bc-ad} = (ac+bd)(st-1)$$

Możemy podstawiać:

$$(at+cs-a-c)\frac{(ac+bd)(ds-b-dst+bst^2)+(a^2+b^2)(bt+dt-dst-bt^2)}{(bc-ad)(st-1)}+$$

$$+(bt+ds-b-d)\frac{(ac+bd)(a-cs+cst-ast^2)+(a^2+b^2)(cst-at-ct+at^2)}{(bc-ad)(st-1)}=$$

= suma 64 składników, redukcje i w końcu: $=(ac+bd)(st-1)$.

I jeszcze jeden punkt:

$$(at+cs-a-c)\frac{(ac+bd)(d-bt+bst-ds^2t)+(c^2+d^2)(bst-bs-ds+ds^2)}{(bc-ad)(st-1)}+$$

$$+(bt+ds-b-d)\frac{(ac+bd)(at-c-ast+cst^2)+(c^2+d^2)(as+cs-cs^2-ast)}{(bc-ad)(st-1)}=$$

$=\ldots=(ac+bd)(st-1)$.

Okazało się, że cztery ortocentra leżą na jednej prostej. Zadanie jest rozwiązane. Jednak widzimy, że rozwiązanie jest obłędne, chociaż jest poprawne. W dodatku jest w nim jasna idea, nie ma żadnego powodu nad nim dłużej myśleć. Jednak po przeczytaniu kilkudziesięciu rozwiązań napisanych w podobny sposób człowiek może pomyśleć chwilę. Może wtedy dojść do wniosku, że zostało ono głupio przedstawione. O co w tym wszystkim naprawdę chodzi?

Otóż w szkołach używane jest na ogół kierunkowe równanie prostej, więc uczniowie, nawet startujący w OM, są do niego przywiązani. Z rzadka używane jest równanie ogólne prostej:

$$Ax+By+C=0, \quad [A,B]\neq[0,0].$$

W rezultacie, gdy dochodzi do jego użycia, uczniowie a później studenci nie widzą, co ma wektor $[A,B]$ do prostej opisanej równaniem $Ax+By+C=0$. Pytani, odpowiadają najczęściej, że jest do niej równoległy. Oczywiście jest do niej prostopadły. Szukanie równania prostej polega więc na znalezieniu wektora do niej prostopadłego. Liczni autorzy tego rozwiązania tak na problem nie patrzyli. Po prostu przeliczyli. Poza tym pisali wszystko we współrzędnych.

Równanie prostej przechodzącej przez ortocentra wygląda, jak wiemy, tak:

$(at+cs-a-c)x+(bt+ds-b-d)y=(ac+bd)(st-1)$

— zresztą zaraz się jeszcze raz okaże, że tak jest. Można je przepisać w postaci wektorowej używając iloczynu skalarnego, dla przypomnienia:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=[v_1,v_2]\cdot[w_1,w_2]=v_1w_1+v_2w_2,$$

więc równanie wygląda tak:

$$(T+S-P-R)\cdot[x,y]=T\cdot S-P\cdot R, \tag{LH}$$

tutaj wybrany punkt, np. T, jest utożsamiany z wektorem zaczynającym się w punkcie O i kończącym się w wybranym punkcie. Wystarczy teraz sprawdzić, że punkty H_m, H_n, H_l, H_k leżą na prostej o równaniu (LH), tu jak poprzednio H_m to ortocentrum trójkąta wyznaczonego przez proste k, l, n itd. Nie interesują nas teraz współrzędne punktu H_m, ani trzech pozostałych. Zachodzą równości

$$(H_m - P) \cdot (T - R) = 0, \ (H_m - T) \cdot (S - P),$$

bo wysokość trójkąta jest prostopadła do boku trójkąta. Wobec tego

$$H_m \cdot T - H_m \cdot R = P \cdot T - P \cdot R, \quad H_m \cdot S - H_m \cdot P = T \cdot S - P \cdot T. \qquad (m)$$

Dodając stronami równości (m) otrzymujemy

$$(T + S - P - R) \cdot H_m = S \cdot T - P \cdot R,$$

więc już wiemy, że punkt H_m leży na prostej (LH).

Ponieważ H_n jest ortocentrum trójkąta wyznaczonego przez proste k, l, m, więc

$$(H_n - R) \cdot (S - P) = 0 = (H_n - S) \cdot (T - R)$$

czyli

$$H_n \cdot S - H_n \cdot P = R \cdot S - R \cdot P, \quad H_n \cdot T - H_n \cdot R = S \cdot T - S \cdot R. \qquad \text{(n)}$$

Po dodaniu stronami równości (n) otrzymujemy

$$(T + S - P - R) \cdot H_n = S \cdot T - P \cdot R,$$

więc punkt H_n też leży na prostej (LH).

Mamy

$$(H_l - T) \cdot (R - S) = 0 = (H_l - R) \cdot (T - P),$$

czyli

$$H_l \cdot R - H_l \cdot S = T \cdot R - T \cdot S \quad \text{oraz} \quad H_l \cdot T - H_l \cdot P = R \cdot T - R \cdot P.$$

Odejmujemy stronami te dwie równości i otrzymujemy

$$H_l(T + S - P - R) = T \cdot S - P \cdot R,$$

co dowodzi, że prosta (LH) przechodzi przez punkt H_l.

A na koniec

$$(H_k - P) \cdot (R - S) = 0 = (H_k - S) \cdot (T - P),$$

więc

$$H_k \cdot R - H_k \cdot S = P \cdot R - P \cdot S \quad \text{oraz} \quad H_k \cdot T - H_k \cdot P = S \cdot T - S \cdot P\,.$$

Znów odejmujemy stronami i otrzymujemy:

$$H_k(T + S - P - R) = T \cdot S - P \cdot R\,,$$

co dowodzi, że prosta (LH) przechodzi przez punkt H_k.

Było krócej, prościej, ale trzeba podkreślić, że to jest to samo rozwiązanie, tylko zapis został zmieniony.

Odległość punktu (p,q) od prostej zdefiniowanej równaniem $Ax + By + C = 0$ wyrażana jest znanym wzorem

$$\frac{|Ap + Bq + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,.$$

Jak wygląda wyprowadzenie? Na ogół jakoś tak. Piszemy równanie prostej prostopadłej do danej

$$-Bx + Ay + Bp - Aq = 0\,.$$

Znajdujemy punkt przecięcia obu prostych

$$x = \frac{B^2p - ABq - AC}{A^2 + B^2}, \quad y = \frac{-ABp + A^2q - BC}{A^2 + B^2}\,.$$

Jakoś nie najlepiej wygląda. Napiszmy nieco inaczej.

$$x = \frac{B^2p - ABq - AC}{A^2 + B^2} = p - \frac{A(Ap + Bq + C)}{A^2 + B^2}\,,$$

$$y = \frac{-ABp + A^2q - BC}{A^2 + B^2} = q - \frac{B(Ap + Bq + C)}{A^2 + B^2}\,.$$

Poprawiło się wyraźnie. Czemu nie od razu tak wyszło? Bo o to poprosiliśmy. To drobiazg, ale należy patrzeć na zadanie kinematycznie. Wyruszamy z punktu (p, q) w podróż z prędkością (wektorową) $[A, B]$, czyli w kierunku prostopadłym do danej prostej. Po czasie t znajdujemy się w punkcie $(p, q) + t[A, B]$. Dla jakiego t jesteśmy na danej prostej? Ano wtedy, gdy

$$A(p + tA) + B(q + tB) + C = 0\,,$$

więc gdy

$$t = -\frac{Ap + Bq + C}{A^2 + B^2}\,.$$

Wobec tego poszukiwana odległość to przebyta droga, czyli długość wektora

$$-\frac{Ap + Bq + C}{A^2 + B^2}\,[A, B]\,.$$

W tym wypadku chodzi o drobiazg, a nie o obłędne obliczenia, ale też o to, by nie bać się interpretacji fizycznej zwłaszcza w tych miejscach, w których upraszcza ona wzory i nadaje im sens fizyczny. Zresztą podział na dziedziny wiedzy jest spowodowany w dużym stopniu potrzebami instytucji przydzielających pieniądze na badania, edukację itp. Wybitni uczeni zajmowali się rozwiązywaniem problemów, a nie ustalaniem, czy są one bardziej fizyczne, czy bardziej matematyczne.

W tablicach maturalnych znalazł się wzór na odległość dwu prostych równoległych:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{i} \quad Ax + By + C_1 = 0\,.$$

Napisano tam, że jest to liczba

$$\frac{|C - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,.$$

Chcąc go udowodnić, można przeciąć obie proste prostopadłą do nich, znaleźć punkty przecięcia, potem ich odległość i już.

Nie warto, bo wynik można szybciej uzyskać. Niech punkt (p, q) leży na drugiej prostej, czyli

$$Ap + Bq + C_1 = 0, \quad \text{więc} \quad Ap + Bq = -C_1\,.$$

Mamy znaleźć odległość punktu (p,q) od prostej $Ax + By + C = 0$. Jest ona równa

$$\frac{|Ap + Bq + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-C_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,.$$

Dwa zadania z I stopnia 62 OM

Dane są liczby całkowite dodatnie m, n oraz d. Udowodnić, że jeżeli liczby $m^2n + 1$ *i* $mn^2 + 1$ *są podzielne przez d, to również liczby* $m^3 + 1$ *i* $n^3 + 1$ *są podzielne przez d.*

Jednak tzw. naturalna metoda rozwiązania tego zadania polega na napisaniu różnicy $m^2n + 1 - (mn^2 + 1) = mn(m - n)$ i wykazaniu, że d jest dzielnikiem $m - n$.

To chwilę trwa. Firmowe rozwiązanie wygląda tak:
Liczba $m(mn^2+1)-n(m^2n+1)=m-n$ jest podzielna przez d jako różnica liczb podzielnych przez d, więc liczba $m^3+1-(m^2n+1)=m^2(m-n)$ jest podzielna przez d.

Wygląda nieco sztucznie? Może. Ale chodzi o to, że dla dowolnych liczb całkowitych a,b istnieją takie liczby całkowite k,ℓ, że $\mathrm{NWD}(a,b)=ka+\ell b$. To twierdzenie sugeruje rozpatrywanie sum postaci $ka+\ell b$, choć formalnie rzecz biorąc nic do pokazanego rozwiązania nie ma.

Znaleźć wszystkie takie pary (a,b) różnych liczb całkowitych dodatnich, że liczba b^2+ab+4 *jest podzielna przez liczbę* a^2+ab+4.

Mamy $b(a^2+ab+4)-a(b^2+ab+4)=4(b-a)$. Ponieważ liczba a^2+ab+4 jest dzielnikiem liczby b^2+ab+4 i $a\neq b$, więc $a<b$. Stąd od razu wynika, że $ab<a^2+ab+4\leq 4(b-a)<4b$, więc $a<4$. Są więc do rozpatrzenia trzy przypadki: $a=1$, $a=2$, $a=3$.

Jeśli $a=1$, to liczba $a^2+a+4=b+5$ musi być dzielnikiem liczby $b^2+b+4=$ $=(b+5)(b-4)+24$, więc również dzielnikiem liczby 24. W grę wchodzą dzielniki większe od 5, czyli liczby 6, 8, 12 i 24, co oznacza, że $b\in\{1,3,7,19\}$, a ponieważ $a<b$, więc $b\in\{3,7,19\}$.

Jeśli $a=2$, to liczba $a^2+a+4=2b+8$ musi być dzielnikiem liczby b^2+2b+4, więc b musi być liczbą parzystą. Z równości $b^2+2b+4=(2b+8)\left(\frac{b}{2}-1\right)+12$ wynika, że $2b+8$ jest dzielnikiem liczby 12, zatem $b+4$ jest dzielnikiem liczby 6, co jest niemożliwe, bo $b>a=2$.

Jeśli $a=3$, to liczba $3b+13$ ma być dzielnikiem liczby b^2+3b+4. Z równości $9(b^2+3b+4)=(3b+13)(3b-4)+88$ wynika, że wtedy liczba $3b+13$ jest dzielnikiem liczby 88, oczywiście większym od 13, zatem równym jednej z liczb $22,44,88$. Ponieważ $b>a=3$ i b jest liczbą całkowitą, więc $b=25$

Znaleźliśmy wszystkie pary: $(1,3)$, $(1,7)$, $(1,19)$, $(3,25)$.

Zakończymy omówieniem dowodu wspomnianego twierdzenia o największym wspólnym dzielniku:
Dla dowolnych liczb całkowitych a,b *istnieją takie liczby całkowite* k,ℓ, *że*

$$\mathrm{NWD}(a,b)=ka+\ell b.$$

Jego genezą jest algorytm Euklidesa. Dzielimy a przez b z resztą:
$a=qb+r_0$, $0\leq r_0<b$, potem b przez r_0:
$b=q_1r_0+r_1$, potem r_0 przez r_1:

$r_0 = q_2 r_1 + r_2$ itd. Ten proces musi się zakończyć resztą 0, bo reszty są nieujemnymi liczbami całkowitymi i $b > r_0 > r_1 > \ldots$. Ostatnia równość wygląda więc tak: $r_{n-1} = q_{n+1} r_n$, gdzie $r_n > 0$ jest liczbą całkowitą, która jest wspólnym dzielnikiem liczb $r_{n-1}, r_{n-2}, r_{n-3}, \ldots, r_1, r_0, b, a$. Mamy też
$r_n = r_{n-2} - q_n r_{n-1} = r_{n-2} - q_n(r_{n-3} - q_{n-1} r_{n-2}) =$
$= (1 + q_n q_{n-1}) r_{n-2} - q_n r_{n-3} = (1 + q_n q_{n-1})(r_{n-4} - q_{n-2} r_{n-3}) - q_n r_{n-3} =$
$= (1 + q_n q_{n-1}) r_{n-4} - \big(q_{n-2}(1 + q_n q_{n-1}) + q_n\big) r_{n-3}$.
Kontynuując otrzymamy w końcu sumę postaci $ka + \ell b$.

Ten dowód jest zapisany w sposób mało przyjemny, dla uczniów lub studentów zupełnie nieczytelny, choć gdybyśmy to samo zrobili na przykładzie liczbowym, to sytuacja poprawiłaby się, jeśli chodzi o zrozumiałość, ale stracilibyśmy ogólność. Można to rozumowanie zapisać lepiej pisząc wyraźnie założenie indukcyjne i tezę indukcyjną, ale można to zrobić jeszcze lepiej.

Rozważmy zbiór złożony ze wszystkich liczb **dodatnich** postaci $ka + \ell b$. Niech $k_0 a + \ell_0 b$ będzie najmniejszą z nich. Udowodnię, że liczba $k_0 a + \ell_0 b$ jest dzielnikiem liczby a. Istnieją takie liczby q i $r \in [0, k_0 a + \ell_0 b)$, że

$$a = q(k_0 a + \ell_0 b) + r\,.$$

Jeśli $0 < r$, to

$$r = (1 - qk_0)a + (-q\ell_0)b\,,$$

więc r jest liczbą postaci $ka + \ell b$ mniejszą od $k_0 a + \ell_0 b$, co jest niemożliwe. Wobec tego $r = 0$, więc

$$a = q(k_0 a + \ell_0 b)\,,$$

co chcieliśmy wykazać. Analogicznie wykazujemy, że liczba $k_0 a + \ell_0 b$ jest dzielnikiem liczby b. Oczywistym jest, że liczba $k_0 a + \ell_0 b$ jest podzielna przez każdy wspólny dzielnik liczb a i b, a to oznacza, że $\mathrm{NWD}(a, b) = q(k_0 a + \ell_0 b)$.

Zapisaliśmy w istocie rzeczy to samo rozumowanie, ale tym razem wszystko jest napisane wyraźnie.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego