O Olimpiadzie, liczbach całkowitych i równaniach

Najpierw kilka twierdzeń, o których nie mówiłem z braku czasu.

Twierdzenie 1 (**o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych**)
Jeśli liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są całkowite, liczby p, q są całkowite i względnie pierwsze, $q \neq 0$ oraz $a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \ldots + a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n = 0$, to liczba p jest dzielnikiem liczby a_0, a liczba q — dzielnikiem liczby a_n.

Dowód. Z równości $a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \ldots + a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n = 0$ wynika, że

$$a_0q^n + a_1pq^{n-1} + a_2pq^{n-2} + \ldots + a_np^n = 0\,.$$

Wobec tego liczba p dzieli iloczyn a_0q^n, a ponieważ jest względnie pierwsza z q^n, więc dzieli liczbę a_0. Analogicznie q dzieli iloczyn a_np^n, jest względnie pierwsza z p^n, więc dzieli a_n. ■

Wniosek 2
Wymierne pierwiastki wielomianu **unormowanego** o współczynnikach całkowitych są liczbami całkowitymi. ■

Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych nie daje żadnych informacji o niewymiernych pierwiastkach wielomianu.

Bez dowodu podaję uogólnienie twierdzenia.

Lemat 3 (Gaussa)
Jeśli wielomian $w(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ ma współczynniki całkowite i jest iloczynem wielomianów $u(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k$ oraz $v(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m$ o współczynnikach wymiernych, to istnieją takie liczby wymierne β i γ, że $\beta \cdot \gamma = 1$ i wielomiany $\beta \cdot u$ oraz $\gamma \cdot v$ mają całkowite współczynniki. ■

Dowód jest dosyć powszechnie dostępny, poza nietrudny i nadaje się na zadanie na kółko. Po ewetualnym przerobieniu tego na kółku można ewetualnei dać jako zadanie (w tym samym duchu) dowód znanego kryterium Eisensteina o nierozkładalności niektórych wielomianów o współczynnikach całkowitych.

Twierdzenie 4 (Eisensteina)
Jeśli liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są całkowite, p jest liczbą pierwszą, która jest dzielnikiem liczb $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, ale nie jest dzidelnikiem liczby a_n, p^2 nie jest dzielnikiem liczby a_0, to wielomian $w(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ nie jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia niższego niż n o współczynnikach całkowitych. ■

Na pierwszym stopniu LXII Olimpiady pojawiło się zadanie:

Dane są liczby całkowite dodatnie m, n *oraz* d. *Udowodnić, że jeżeli liczby* m^2n+1 *i* mn^2+1 *są podzielne przez* d, *to również liczby* m^3+1 *i* n^3+1 *są podzielne przez* d.

Większość uczestników dała sobie z nim radę i w zasadzie nic specjalnie ciekawego w nim nie ma. Jednak tzw. naturalna metoda rozwiązania tego zadania polega na napisaniu różnicy $m^2n+1-(mn^2+1)=mn(m-n)$ i wykazaniu, że d jest dzielnikiem $m-n$. To chwilę trwa. Firmowe rozwiązanie wygląda tak:
Liczba $m(mn^2+1)-n(m^2n+1)=m-n$ jest podzielna przez d jako różnica liczb podzielnych przez d, więc liczba $m^3+1-(m^2n+1)=m^2(m-n)$ jest podzielna przez d. Wygląda nieco sztucznie? Tak, ale to wynik przemyślenia rozwiązania. Często zapisujemy coś jako sumę lub różnicę liczb podzielnych np. przez d. Geneza tego sposobu myślenia to algorytm Euklidesa szukania największego wspólnego dzielnika. Czy warto tak zapisywać? Rozwiązanie krótsze jest na ogół bardziej czytelne niż dłuższe. Nigdy nie wymagamy wyjaśniania, skąd wziął się pomysł na rozwiązanie lub zredagowanie rozwiązania.

Na finale XVI OM pojawiło się zadanie: *Udowodnić, że jeśli liczby* a,b *są całkowite oraz*

$$2a^2+a=3b^2+b\,,$$

to liczby $a-b$ *i* $2a+2b+1$ *są kwadratami liczb całkowitych.*

Mamy $b^2=2a^2+a-2b^2-b=(a-b)(2a+2b+1)$. Jeśli liczba pierwsza p dzieli liczby $a-b$ i $2a+ab+1$, to dzieli też liczbę b oraz liczbę $\big(2a+2b+1-2(a-b)\big)-4b=4b+1-4b=1$, więc nie ma takiej liczby pierwszej. Stąd i z równości $b^2=(a-b)(2a+2b+1)$ wynika, że każdy czynnik pierwszy liczby $a-b$ pojawia się w jej rozkładzie na czynniki pierwsze tyle samo razy ile w rozkładzie liczby b^2 na czynniki pierwsze, więc w parzystej potędze. To samo można powiedzieć o czynnikach pierwszych liczby $2a+2b+1$. Czy to koniec zadania?

Ależ skąd! Przecież nie wiemy, czy liczba $a-b$ jest nieujemna! To trzeba wykazać i to korzystając z całkowitości liczb a,b, bo bez trudu można znaleźć liczby **rzeczywiste**, dla których spełniona jest równość $2a^2+a=3b^2+b$ i $a<b$, np. $b=1$, $a=-\frac{1}{4}(1+\sqrt{33})$.

Załóżmy, że $a-b<0$, więc że istnieją takie liczby całkowite k,ℓ, że

$$a-b=-k^2 \quad \text{i} \quad 2a+2b+1=-\ell^2\,. \tag{1}$$

Liczba $3b^2+b=b(3b+1)$ jest parzysta, więc liczba $2a^2+a$ też jest parzysta i wobec tego liczba a jest parzysta. Z równań (1) wynika, że $a=\frac{1}{4}\left(-2k^2-\ell^2-1\right)$. Ponieważ a jest liczbą całkowitą, więc liczba ℓ jest nieparzysta. Istnieje więc taka liczba całkowita n, że $\ell=2n+1$. Wobec tego $a=\frac{1}{4}\left(-2k^2-4n(n+1)-2\right)$. Stąd wynika, że k jest liczbą nieparzystą, więc istnieje taka liczba całkowita m, że $k = 2m+1$. Wobec tego $a = -2(4m^2+4m+1) - 4n(n+1) - 2) = -2m^2 - 2m - n(n+1) - 1$, co oznacza, że liczba a jest nieparzysta, wbrew wcześniejszym ustaleniom. Założenie $a < b$ doprowadziło do sprzeczności, więc $a \geq 0$. Dowód został zakończony. ■

Oczywiście druga część dowodu jest trudniejsza od pierwszej.

Można na tym zakończyć, bo zadanie jest rozwiązane. Ale można też zadać pytanie o pary liczb a, b spełniających równanie $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Można je potraktować jako równanie z niewiadomą a i parametrem b:

$$2a^2 + a - (3b^2 + b) = 0\,.$$

Równanie kwadratowe, więc $\Delta_a = 1 + 8(3b^2 + b)$. Aby rozwiązanie a było całkowite musi istnieć taka liczba całkowita c, że $1 + 8(3b^2+b) = c^2$, czyli $24b^2 + 8b + 1 - c^2 = 0$. To znów równanie kwadratowe, z niewiadomą b. $\Delta_b = 64 - 96(1-c^2) = 32(3c^2-1)$. Aby rozwiązanie b było całkowite musi istnieć taka liczba całkowita d, że $3c^2 - 1 = 2d^2$.

Jeśli takie liczby c, d istnieją, to $b = \frac{-8-8d}{48} = -\frac{1+d}{6}$ lub $b = \frac{-8+8d}{48} = -\frac{1-d}{6}$, więc b jest całkowite, gdy reszta z dzielenia liczby b przez 6 jest równa 5 lub 1. Wtedy $a = \frac{-1-c}{4}$ lub $a = \frac{-1+c}{4}$, więc jeśli c jest nieparzysta, to jedna z tych liczb jest całkowita, a druga nie.

Jeśli $3c^2 - 1 = 2d^2$, to oczywiście $c \neq 0 \neq d$ i $\frac{3}{2} = \frac{d^2}{c^2} + \frac{1}{2c^2}$. Widać więc, że $\frac{d}{c} \approx \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ dla „dużych” liczb c. Zajmijmy się liczbą $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Mamy

$$\sqrt{\tfrac{3}{2}} = 1 + \tfrac{\sqrt{6}-2}{2} = 1 + \tfrac{1}{\sqrt{6}+2} = 1 + \tfrac{1}{4+\sqrt{6}-2} = 1 + \tfrac{1}{4+\frac{2}{\sqrt{6}+2}} = 1 + \tfrac{1}{4+\frac{1}{\frac{\sqrt{6}+2}{2}}} =$$

$= 1 + \frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{\sqrt{6}-2}{2}}} = 1 + \frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\dots}}}}$, bo liczba $\frac{\sqrt{6}-2}{2}$ pojawiła się ponownie, więc wszystko zaczyna powtarzać się.

Przedstawiliśmy liczbę $\sqrt{\frac{3}{2}}$ jako tzw. ułamek łańcuchowy.

Kolejne ułamki wyglądają tak:

$$1 = \tfrac{1}{1}\,,\ 1 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{4}\,,\ 1 + \tfrac{1}{4+\frac{1}{2}} = \tfrac{11}{9}\,,\ 1 + \tfrac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}} = \tfrac{49}{40}\,,\ \tfrac{109}{89}\,,\ \tfrac{485}{396}\,,\ \tfrac{1079}{881}\,, \dots \tag{U}$$

Ich kwadraty to $\frac{1}{1} < \frac{3}{2}$, $\frac{25}{16} > \frac{3}{2}$, $\frac{121}{81} < \frac{3}{2}$, $\frac{2401}{1600} > \frac{3}{2}$, $\frac{11881}{7921} < \frac{3}{2}$, ...

Trzy zadania.

1. Udowodnić, że jeśli $\frac{p_n}{q_n}$ jest n–tym ułamkiem tego ciągu, przy czym $p_0 = 1 = q_0$, to $p_{n+2} = a_{n+1}p_{n+1} + p_n$ i $q_{n+2} = a_{n+1}q_{n+1} + p_n$, przyjmujemy tu $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 2$, ... ■

2. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą wzory $\begin{vmatrix} p_{n+1} & p_n \\ q_{n+1} & q_n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$ i $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n \cdot q_{n+1}}$. ■

3. Udowodnić, że jeśli liczby r i $s > 0$ są całkowite i liczba $\frac{r}{s}$ znajduje się między liczbami $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ i $\frac{p_n}{q_n}$, to zachodzi nierówność $k > q_{n+1}$. ■

Uwaga 5

W podobny sposób można zdefiniować ułamek łańcuchowy dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x. Wtedy a_0 to część całkowita liczby x, np. dla $x = \sqrt[3]{70}$ zachodzi równość $a_0 = 4$, bo $4 < \sqrt[3]{70} < 5$. Następnie definiujemy a_1 jako część całkowitą liczby $\frac{1}{x-a_0}$. Dla $x = \sqrt[3]{70}$ otrzymujemy $a_1 = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt[3]{70}-4} \right\rfloor = 8$. Definiujemy a_2 jako część całkowitą liczby $\frac{1}{\frac{1}{x-a_0}-a_1}$ itd. Tezy sformułowane w zadaniach 1 – 3 pozostają prawdziwe. Jeśli x jest liczbą wymierną, to procedura kończy się po skończonej liczbie kroków. W przypadu liczby niewymiernej otrzymujemy ułamek łańcuchowy nieskończony. Więcej o ułamkach łańcuchowych można znaleźć np. w „Teorii liczb" W. Sierpińskiego i wielu innych książkach z teorii liczb. Są też książki poświęcone tylko ułamkom łańcuchowym. Ułamki łańcuchowe przydają się do przybliżania liczb i funkcji. ■

Ze stwierdzeń zawartych w zadaniach i uwadze korzystać nie będziemy, ale są one ważne i nadają się na zadania na kółko (pierwsze może być trudnawe, drugie jest proste, a trzecie to łatwy, krótki wniosek z drugiego, ale jednak wymagający zrozumienia sytuacji, więc również pewnego namysłu).

Przyjrzyjmy się tym ułamkom z wiersza (U), które są mniejsze od $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Widzimy, że $3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^2 = 1$, $3 \cdot 9^2 - 2 \cdot 11^2 = 1$, $3 \cdot 89^2 - 2 \cdot 109^2 = 1$, $3 \cdot 881^2 - 2 \cdot 1079^2 = 1$, ...

Niech $\delta = 5d + 6c$, $\gamma = 4d + 5c$. Jeśli $3c^2 - 2d^2 = 1$, to

$$3\gamma^2 - 2\delta^2 = 3(4d + 5c)^2 - 2(5d + 6c)^2 = 3c^2 - 2d^2 = 1\,.$$

Mamy więc „maszynkę" do wskazywania następnych rozwiązań równania $3c^2 - 2d^2 = 1$.* Wskazane już rozwiązania otrzymujemy z rozwiązania $d = 1$, $c = 1$: $11 = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1$, $9 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1$. Następnie $109 = 5 \cdot 11 + 6 \cdot 9$ oraz $89 = 4 \cdot 11 + 5 \cdot 9$ itd. Innych rozwiązań nie ma, co wykażemy zaraz.

Łatwo można zauważyć, że $\delta = 5d + 6c$ i $\gamma = 4d + 5c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d = 5\delta - 6\gamma$ i $c = 5\gamma - 4\delta$. Zakładamy, że liczby γ, δ są dodatnie i $3\gamma^2 - 2\delta^2 = 1$. Wtedy również $3c^2 - 2d^2 = 3(5\gamma - 4\delta)^2 - 2(5\delta - 6\gamma)^2 = 3\gamma^2 - 2\delta^2 = 1$.

* Wiem z własnego doświadczenia, że te wzory można zobaczyć wpatrując się w ułamki z ciągu (U), jeśli wierzy się mocno w istnienie takich wzorów. Można też uzyskać je z wzorów rekurencyjnych z zadania 1.

Mamy też $c = 5\gamma - 4\delta = 5\sqrt{\frac{1+2\delta^2}{3}} - 4\delta = \dfrac{25(1+2\delta^2) - 3\cdot 16\delta^2}{3(5\sqrt{\frac{1+2\delta^2}{3}} + 4\delta)} = \dfrac{25+2\delta^2}{3(5\sqrt{\frac{1+2\delta^2}{3}} + 4\delta)} > 0$,

$d = 5\delta - 6\gamma = 5\delta - 6\sqrt{\frac{1+2\delta^2}{3}} = \dfrac{25\delta^2 - 12(1+2\delta^2)}{5\delta + 6\sqrt{\frac{1+2\delta^2}{3}}} = \dfrac{\delta^2 - 12}{5\delta + 6\sqrt{\frac{1+2\delta^2}{3}}} > 0$, gdy $\delta > 3$,

$c - \gamma = 4(\gamma - \delta) < 0$ oraz

$d - \delta = 4\delta - 6\gamma = 2\left(2\delta - 3\sqrt{\frac{1+2\delta^2}{3}}\right) = 2\frac{4\delta^2 - 3(1+2\delta^2)}{2\delta + 3\sqrt{\frac{1+2\delta^2}{3}}} = 2\frac{-2\delta^2 - 3}{2\delta + 3\sqrt{\frac{1+2\delta^2}{3}}} < 0$.

Wykazaliśmy, że przejście od pary liczb całkowitych (δ, γ), do pary (d, c) powoduje zmniejszenie obu elementów pary przy zachowaniu ich dodatniości. Oznacza, to, że po skończenie wielu takich operacjach wartość liczby δ stanie się mniejsza od 3, a taka para jest tylko jedna (z dokładnością do znaków): $(1,1)$.

Dodajmy jeszcze, że dzieląc kolejne liczby d, czyli liczby $d_0 = 1$, $d_1 = 11$, $d_2 = 109$, $d_3 = 1079, \ldots$ przez 6 otrzymujemy reszty $1, 5, 1, 5, \ldots$, bowiem $5 \cdot 1 \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 6)$ oraz $5 \cdot 5 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 6)$. Z wzoru $b = \frac{-1 \pm d}{6}$ otrzymujemy więc kolejno liczby całkowite b: $b_0 = 0$, $b_1 = -2$, $b_2 = 18$, $b_3 - 180$, ... Odpowiadające im liczby a otrzymujemy z równości $a = \frac{-1 \pm c}{4}$: $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 22$, $a_3 = 220$, ...

Można uzyskać jawne wzory na c_n i d_n korzystając z równości

$$\begin{cases} d_{n+1} = 5d_n + 6c_n \\ c_{n+1} = 4d_n + 5c_n \end{cases}$$

Mnożąc pierwszą z nich przez 5 i odejmując od wyniku drugą pomnożoną przez 6 otrzymujemy $5d_{n+1} - 6c_{n+1} = d_n$, czyli $6c_{n+1} = 5d_{n+1} - d_n$. Stąd i z równości $d_{n+2} = 5d_{n+1} + 6c_{n+1}$ otrzymujemy wzór $d_{n+2} = 10d_{n+1} - d_n$. Znajdziemy takie liczby rzeczywiste q, że $q^{n+2} = 10q^{n+1} - q^n$. Ciągi (q^n) będą zdefiniowane takim samym wzorem rekurencyjnym jak ciąg (d_n). Dzieląc stronami przez q^n i przenosząc wszystko na jedną stronę otrzymujemy $0 = q^2 - 10q + 1 = (q-5)^2 - 24$. Wobec tego są dwie takie liczby $q_1 = 5 - \sqrt{24} = 5 - 2\sqrt{6}$ oraz $q_2 = 5 + \sqrt{24} = 5 + 2\sqrt{6}$. Znajdziemy takie liczby A, B, że $d_n = Aq_1^n + Bq_2^n$ dla $n = 0, 1, 2 \ldots$. Wystarczy, aby tak było dla $n = 0$ i $n = 1$, bo następne wyrazy, we **wszystkich trzech wypadkach** wyliczane są z wzoru $d_{n+2} = 10d_{n+1} - d_n$. Mają więc być spełnione równości

$$\begin{cases} d_0 = 1 = Aq_1^0 + Bq_2^0 = A + B \\ d_1 = 11 = Aq_1^1 + Bq_2^1 = A(5 - 2\sqrt{6}) + B(5 + 2\sqrt{6}) \end{cases}$$

Otrzymujemy $11(5 - 2\sqrt{6}) - 1 = A(5 - 2\sqrt{6})^2 - A = A(48 - 20\sqrt{6})$. Wynika stąd, że $A = \frac{54 - 22\sqrt{6}}{4(12 - 5\sqrt{6})} = \frac{(27 - 11\sqrt{6})(12 + 5\sqrt{6})}{2(144 - 150)} = \frac{-6 + 3\sqrt{6}}{-12} = \frac{2 - \sqrt{6}}{4}$ i wobec tego $B = \frac{2 + \sqrt{6}}{4}$. Możemy napisać, że $d_n = \frac{2 - \sqrt{6}}{4} \cdot (5 - 2\sqrt{6})^n + \frac{2 + \sqrt{6}}{4} \cdot (5 + 2\sqrt{6})^n$.

Wzór na c_n można uzyskać w podobny sposób. Postąpimy jednak nieco inaczej. Skorzystamy z wyprowadzonego już wzoru $d_{n+1} = 5d_n + 6c_n$. Wyznaczamy z niego
$6c_n = d_{n+1} - 5d_n = \frac{2-\sqrt{6}}{4} \cdot (5 - 2\sqrt{6}\,)^{n+1} + \frac{2+\sqrt{6}}{4} \cdot (5 + 2\sqrt{6}\,)^{n+1} -$
$- 5(\frac{2-\sqrt{6}}{4} \cdot (5 - 2\sqrt{6}\,)^{n} + \frac{2+\sqrt{6}}{4} \cdot (5 + 2\sqrt{6}\,)^{n}) =$
$= (-2\sqrt{6}\,)\frac{2-\sqrt{6}}{4} \cdot (5 - 2\sqrt{6}\,)^{n} + 2\sqrt{6}\frac{2+\sqrt{6}}{4} \cdot (5 + 2\sqrt{6}\,)^{n} =$
$= (3 - \sqrt{6}\,) \cdot (5 - 2\sqrt{6}\,)^{n} + (3 + \sqrt{6}\,) \cdot (5 + 2\sqrt{6}\,)^{n}$. Wynika stąd, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór $c_n = \frac{3-\sqrt{6}}{6} \cdot (5 - 2\sqrt{6}\,)^{n} + \frac{3+\sqrt{6}}{6} \cdot (5 + 2\sqrt{6}\,)^{n}$. ■