Kilka zadań z Układów Dynamicznych

4 maja 2014

Dziewiąta seria

Zadanie 1. Niech $f(z) = e^z$. Udowodnić, że dla każdego ciągu liczb całkowitych $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ istnieje taki punkt okresowy p przekształcenia f, że $\mathrm{Im}(f^j(p)) \in (2n_j\pi, (2n_j + 1)\pi)$ dla $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.
Ile jest takich punktów okresowych dla danego ciągu $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$?
Udowodnić, że $|(f^k)'(p)| > 1$.

Zadanie 2.
Niech $f(z) = e^z$. Niech $A = \{z \in \mathbb{C}\colon \quad \mathrm{Im}(f^n(z)) \in (0, 2\pi) \quad \text{dla} \quad n \geq 0\}$. Udowodnić, że $\ell_2(A) = 0$, ℓ_2 oznacza tu dwuwymiarową miarę Lebesgue'a.

Zadanie 3. Opisać zbiory Julii homografii.

Zadanie 4. Niech $f(z) = \sin z$, $g(z) = \sinh z$. Wykazać, że zbiór Julii przekształcenia f nie jest całą płaszczyzną.
Wykazać, że zbiór Julii przekształcenia g nie jest całą płaszczyzną.

Zadanie 5. Ile punktów stałych ma przekształcenie $\mathbb{C} \ni z \mapsto \sin z \in \mathbb{C}$?