Kilka zadań z Układów Dynamicznych

19 marca 2014

Siódma seria

Zadanie 1. Niech $f\colon \mathbb{R}\setminus\{k\frac{\pi}{2}\colon \quad k\in\mathbb{Z}\}\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=a\tan(x)$, gdzie $a>1$. Wykazać że miara z gęstością

$$\rho(x)=\frac{1}{\pi}\frac{p}{p^2+x^2}$$

jest niezmiennicza dla f, jeśli p jest liczbą dodatnią spełniającą równanie

$$a\cdot\tanh(p)=p.$$

Zadanie 2. Niech $f\colon \mathbb{R}\setminus\{k\frac{\pi}{2}\colon \quad k\in\mathbb{Z}\}\longrightarrow\mathbb{R}\}$ będzie dana wzorem $f(x)=\tan(x)$. Wykazać że miara z gęstością $\frac{1}{x^2}$ jest niezmiennicza dla f. Jest to jednak miara nieskończona.
Czy przekształcenie $f(x)=\tan(x)$ ma skończoną miarę niezmienniczą bezwzględnie ciągłą względem miary Lebesgue'a?

Zadanie 3. Niech T będzie przekształceniem Gaussa $T(x)=\{\frac{1}{x}\}$. Wykazaliśmy (referat na seminarium) że T zachowuje miarę z gęstością

$$\frac{1}{\ln 2}\frac{1}{x+1}.$$

Ustalmy $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$. Wykazać że przekształcenie

$$T_n(x)=\begin{cases} n\cdot x & \text{dla } 0\leq x\leq\frac{1}{n}\\ T(x) & \text{dla } \frac{1}{n}<x\leq 1\end{cases}$$

zachowuje tę samą miarę.

Zadanie 4. Niech $(X,\mathfrak{M},\mu)$ będzie przestrzenią z miarą probabilistyczną, $T\colon X\longrightarrow X$ — przekształceniem mierzalnym zachowującym miarę μ. Niech $A\in\mathfrak{M}$. Udowodnić, że dla μ–prawie każdego $x\in A$ istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że $T^n(x)\in A$, czyli: prawie każdy punkt zbioru A powraca do A nieskończenie wiele razy.

Zadanie 5. Przypominamy definicję ergodyczności: $(X,\mathfrak{M},\mu)$ będzie przestrzeń z miarą, $T\colon X\longrightarrow X$ — przekształceniem mierzalnym zachowującym miarę μ.

Mówimy, że przekształcenie T jest ergodyczne, jeśli dla każdego zbioru T–niezmienniczego $A\in\mathfrak{M}$ (tzn. $T^{-1}(A)=A$) zachodzi jedna z równości: $\mu(A)=0$, $\mu(X\setminus A)=0$.

Zbadać czy następujące przekształcenia znane z referatów na seminarium są ergodyczne:

- Obrót na okręgu, z miarą Lebesgue'a.
- Hiperboliczny automorfizm torusa T^2.
- Automorfizm torusa T^4 określony macierzą $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
- Dyfeomorfizm S^1 klasy C^2 z niewymierną liczbą obrotu i jedyną (jaką?) miarą niezmienniczą.
- Dowolny homeomorfizm S^1 z niewymierną liczbą obrotu; najpierw- ustalić ile ma miar niezmienniczych?
- Przekształcenie Gaussa z miarą niezmienniczą bezwzględnie ciągła względem miary Lebesgue'a.

Zadanie 6. Dla jakiego $a \in \mathbb{C}$ funkcja $z \mapsto \exp(az)$ ma punkt stały, w którym jej pochodna jest równa 1.

Zadanie 7. Co można powiedzieć o zbiorze tych $a \in \mathbb{C}$, dla których odwzorowanie $a \in \mathbb{C}$ funkcja $z \mapsto \exp(az)$ ma punkt stały, w którym moduł pochodnej jest równy 1?

Zadanie 8. Udowodnić, że w zbiorze $0 < \mathrm{Im}(z) < 2\pi$ funkcja $\exp(z)$ ma dokładnie jeden punkt stały oraz że moduł pochodnej w nim jest większy od 1.

Zadanie 9. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $n > 0$ oraz $n < -1$ w zbiorze $2n\pi < \mathrm{Im}(z) < 2(n+1)\pi$ funkcja $\exp(z)$ ma dokładnie jeden punkt stały oraz że moduł pochodnej w nim jest większy od 1.