Kilka zadań z Układów Dynamicznych

11 stycznia 2014

Szósta seria

Oczekujemy, że każdy uczestnik seminarium rozwiąże co najmniej dwa spośród dotąd nieomawianych zadań.

Definicja. *Grupą topologiczną* nazywamy grupę, która jest jednocześnie grupą i przestrzenią topologiczną a działania grupowe (mnożenie o odwracanie elementów grupy są) ciągłe. □

Grupami topologicznymi są przestrzeń euklidesowa, okrąg (jako zbiór liczb zespolonych o module 1), torus T^n wymiaru n (jako produkt n okręgów), sfera trójwymiarowa (jako zbiór kwaternionów o module 1), zbiór liniowych izomorfizm po w przestrzeni euklidesowej, zbiór przekształceń afinicznych (różnowartościowych), zbiór Cantora (jako produkt $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\infty}$). Zachodzi następujące, opublikowane w 1932 r.

Twierdzenie Haara

Jeśli G jest lokalnie zwartą grupą topologiczną, to istnieją miary: lewoniezmiennicza μ_l i prawoniezmiennicza μ_r tj, takie miary, że dla każdego $g \in G$ i każdego zbioru borelowskiego $A \subseteq G$ zachodzą równości $\mu_\ell(gA) = \mu_\ell(A)$ oraz $\mu_r(Ag) = \mu_r(A)$. Miary te są wyznaczone jednoznacznie przez warunek niezmienniczości z dokładnością do pomnożenia przez stałą.

Zadanie 1. Znaleźć lewoniezmienniczą i prawoniezmienniczą miarę Haara na grupie przekształceń afinicznych prostej, czyli przekształceń postaci $x \mapsto ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$.

Zadanie 2. Wykazać, że na grupie zwartej lewoniezmiennicza miara pokrywa się z prawoniezminniczą.

Wskazówka. Czy nie warto skorzystać z twierdzenia Fubini'ego?

Zadanie 3. Trójwymiarowa sfera S^3 jest grupą nieabelową. Niech $g \in S^3$. Definiujemy $L_g(z) = gx$ dla $x \in S^3$. Dla jakich $g \in S^3$ przeksztełcenie L_g jest ergodyczne (względem miary Haara).

To odpowiednika pytania o ergodyczność przesunięć na torusie. To pytanie można powtórzyć w odniesieniu do przesunięć na innych grupach.

Zadanie 4. Udowodnić, że kolejne wyrazy ułamka łańcuchowego tworzą ciąg okresowy od pewnego miejsca wtedy i tylko wtedy, gdy reprezentowana przez ten ułamek liczba jest pierwiastkiem równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych.

Uwaga. To zadanie nie ma nic do układów dynamicz nych, ale jest nietrudne i pokazuje pewien fakt, który wiele osób skłonnych jest uznać za interesujący.

Zadanie 5. Udowodnić, że zbiór liczb niewymiernych jest homeomorficzny ze zbiore $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Wskazówka. Czy to wiąże się ułamkami łańcuchowymi?

Uwaga. Hugo Steihaus w *Kalejdoskopie matematycznym* napisał, że muzycy europejscy powinni w zasadzie porzucić liczbę $2^{1/12}$ i zastąpić ją przez $2^{1/17}$, bo
$2^{1/12} = [1; 16, 1, 4, 2, 7, 1, 1, 2, 2, 7, 4, 1, 2, 1, 60, 1, 3, 1, 2, \dots]$ podczas, gdy
$2^{1/17} = [1; 24, 34, 4, 3, 49, 3, 1, 5, 1, 1, 3, 6, 1, 1, 1, 5, 14, 1, 1, \dots]$,
więc kolejne redukty w pierwszym wypadku to
$\frac{1}{1}, \frac{17}{16}, \frac{18}{17}, \frac{89}{64}, \frac{196}{185}, \dots$ a w drugim:
$\frac{1}{1}, \frac{25}{24}, \frac{851}{817}, \frac{3429}{3292}, \frac{11138}{10693}, \dots$
Rzecz w tym, że mianowniki kolejnych reduktów szybciej rosną w wypadku $2^{1/17}$, a ponoć różne dźwięki lepiej współbrzmią, gdy ich częstotliwości są współmierne (pitagorejczycy). W używanej gamie częstotliwość przy zwiększaniu wysokości dźwięku o jeden półton mnożona jest przez $2^{1/12}$, a lepiej byłoby mnożyć przez $2^{1/17}$, który dokładniej można przybliżać liczbami wymiernymi.