Kilka zadań z Układów Dynamicznych

17 grudnia 2013

Piąta seria

Definicja. Miarą Lebesgue'a L na torusie $\mathbb{T}^2$ nazywamy poniżej miarę, która przy jest obrazem miary Lebesgue'a na jednostkowym kwadracie przy wiadomym rzutowaniu. Inaczej: jest to produkt unormowanych miar Lebesgue'a na okręgach przy utożsamieniu $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Zadanie 1. Przesunięcia na torusie $\mathbb{T}^2$. Niech $[\alpha_1, \alpha_2] \in \mathbb{R}^2$. Rozważamy przekształcenie $T_{[\alpha_1,\alpha_2]} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wzorem $T_{[\alpha_1,\alpha_2]}(x, y) = (x + \alpha_1, y + \alpha_2)$. $T_{[\alpha_1,\alpha_2]}$ wyznacza dyfeomorfizm torusa $\mathbb{T}^2$; oznaczamy go tak samo. Należy sprawdzić, że ten dyfeomorfizm zachowuje miarę L, a następnie:

1. Wykazać, że jeżeli $1, \alpha_1, \alpha_2$ są liniowo niezależne nad $\mathbb{Q}$, to trajektoria każdego punktu torusa jest gęsta.

2. Wykazać, że jeżeli $1, \alpha_1, \alpha_2$ są liniowo zależne nad $\mathbb{Q}$ to żadna trajektoria nie jest gęsta.

3. Wykazać, przy założeniu punktu (1), że dla każdej funkcji ciągłej $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\infty} f \circ T^i_{[\alpha_1,\alpha_2]} \Longrightarrow \int f dl$$

   gdzie dL oznacza miarę Lebesgue'a na torusie $\mathbb{T}^2$.

4. Wywnioskować z punktu (3), że $T_{[\alpha_1,\alpha_2]}$ ma dokładnie jedną borelowską miarę niezmienniczę.

Wskazówka. 1: można rozumować tak jak w przypadku obrotu niewymiernego: wskazać jakiś punkt skupienia trajektorii, wybrać punkty $T^n(x), T^m(x)$ bliskie sobie i...
2: można też podejść do problemu analitycznie i rozważyć funkcje postaci $f(x, y) = e^{ikx}e^{imx}$ gdzie $k, m \in \mathbb{Z}$. Sprawdzić, że dla tych funkcji teza punktu (3), przy wiadomym założeniu, zachodzi i wywnioskować stąd.

Zadanie 2. Miary niezmiennicze.

Niech X będzie przestrzenią metryczną zwartą, $T : X \to X$ przekształceniem ciągłym, μ - probabilistyczną miara borelowską na X. Niech $T : X \to X$ będzie przekształceniem ciągłym. Wówczas możemy zdefiniować nową miarę borelowską $T_*\mu$, określając ją na zbiorach borelowskich wzorem

$$T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)).$$

Mówimy, że miara jest niezmiennicza dla T jeżeli $T_*\mu = \mu$.

Wykazać , że μ jest niezmiennicza wtedy i tylko wtedy gdy dla każdej funkcji ciągłej $f : X \to \mathbb{R}$

$$\int f d\mu = \int f \circ T d\mu.$$

Uwaga. Definicja obrazu miary przy przekształceniu $T_*\mu$ nie wymaga ciągłości przekształcenia; ważne jest tylko, żeby zbiór $T^{-1}(A)$ był mierzalny jeśli A jest mierzalny. Prowadzi to do następującej definicji:

Definicja. Niech $(X, \mathcal{M}, \mu)$ - przestrzeń z miarą probabilistyczną. Mówimy, że $T : X \to T$ jest *mierzalne* jeśli dla każdego zbioru $A \in \mathcal{M}$ zbiór $T^{-1}(A)$ też należy do σ–ciała $\mathcal{M}$. Dla przekształcenia mierzalnego możemy więc zdefiniować, wzorem jak powyżej, miarę $T_*\mu$ na tym samym σ- ciele $\mathcal{M}$. Miara μ jest T-niezmiennicza jeśli $T_*\mu = \mu$.

Zadanie 3. Definiujemy przekształcenia $g\colon [0.1] \to [0,1]$ oraz $g_a\colon [0,1] \to [0,1]$ $(a \in (0,1))$, wzorami:

$$g(x) = (2x)_{\mathrm{mod} 1},$$

$$g_a(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} & \text{dla} \quad x \in [0,a) \\ \frac{x-a}{1-a} & \text{dla} \quad x \in [a,1] \end{cases}.$$

1. Sprawdzić, że przekształcenia g, g_a zachowują miarę Lebesgue'a na odcinku $[0,1]$.

2. Wykazać, że przekształcenia g_a i g, traktowane jako przekształcenia $[0,1] \to [0,1]$ są topologicznie sprzężone.

3. Niech homeomorfizm $h_a\colon [0,1] \to [0,1]$ będzie sprzężeniem między g oraz g_a, tzn.

   $$h_a \circ g_a = g \circ h_a.$$

   Wykazać, że miara $\mu_a = (h_a)_*(l)$ (czyli obraz miary Lebesgue'a przy przekształceniu h_a) jest niezmiennicza dla g.

4. Mamy więc nieprzeliczalnie wiele różnych miar niezmienniczych dla g, wszystkie bezatomowe, o nośniku (topologicznym) będącym całym odcinkiem. Wykazać, że miary μ_a są faktycznie parami różne.

5. Wykazać, że miary μ_a są parami singularne.

Zadanie 4. Przekształcenie piekarza. Rozważamy kwadrat $X = [0,1]^2$ z miarą Lebesgue'a, określoną na σ–ciele zbiorów borelowskich. Definiujemy przekształcenie $T : X \to X$ wzorem

$$T(x,y) = \begin{cases} (2x, \frac{1}{2}y) & \text{dla} \quad x \in [0, \frac{1}{2}), y \in [0,1] \\ (2x-1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) & \text{dla} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1], y \in [0,1] \end{cases} . \tag{1}$$

Wykazać , że T zachowuje miarę Lebesgue'a. Ponadto: poszukać gęstych orbit.

Zadanie 5. (Tym razem będzie mowa o nieskończonej mierze niezmienniczej.) Rozważamy przekształcenie $T : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$T(x) = x - \frac{1}{x}.$$

Wykazać , że T zachowuje miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$, w następujący sposób:

- Ustalić punkt $y \in \mathbb{R}$ i wyznaczyć jego dwa przeciwobrazy x_1, x_2 (czyli takie punkty, że $T(x_1) = T(x_2) = y$
- Obliczyć $T'(x_1)$, $T'(x_2)$.
- Przekonać się, że $\frac{1}{T'(x_1)} + \frac{1}{T'(x_2)} = 1$
- Przekonać się, że powyższa tożsamość wystarczy do wykazania, że przekształcenie T zachowuje miarę Lebesgue'a.
- Zaproponować jakieś ogólne twierdzenie, na podstawie tego przykładu.

Zadanie 6. Niech $a_2, a_3, \dots$ będą dowolnymi liczbami zespolonymi, dla których szereg $\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ma dodatni promień zbieżności. Niech $f(z) = 2z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ dla tych $z \in \mathbb{C}$, dla których szereg $\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny. Udowodnić, że istnieją: taka liczba $\varrho > 0$ i takie różnowartościowe przekształcenie analityczne $h\colon D(0,\varrho) \longrightarrow \mathbb{C}$, że $h(2z) = f(h(z))$ dla każdego $z \in D(0,\varrho)$, $D(0,\varrho) = \{z \in \mathbb{C}: \quad |z| < \varrho\}$.

Wskazówka. Dwie propozycje rozwiązania tego zadania.

Propozycja pierwsza

- Zauważyć, że istnieje otoczenie V zera, na którym f jest odwracalne. Niech $U = f(V)$ i niech $f^{-1}\colon U \to V$ będzie przekształceniem odwrotnym; można założyć, że $|(f^{-1})'| < \frac{2}{3}$ na zbiorze U, więc również $f^{-1}(U) \subset U$. W dalszym ciągu f^{-n} oznacza n–krotne złożenie $\underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}}_{n \text{ liter } f}$ funkcji f^{-1}.
- Rozważamy ciąg przekształceń $h_n\colon U \to \mathbb{C}$,

  $$h_n(z) = 2^n \cdot f^{-n}(z).$$

- Wówczas h_n jest holomorficznym dyfeomorfizmem (czyli biholomorfizmem) U na zbiór $h_n(U)$, $h_n(0) = 0$, $(h_n)'(0) = 1$.

- Można oszacować różnicę:

$$h_{n+1}(z) - h_n(z) = 2^{n+1} f^{-(n+1)}(z) - 2^n f^{-n}(z) =$$
$$2^{n+1}\left(\tfrac{1}{2} f^{-(n)}(z) + O(|f^{-n}(z)|^2)\right) - 2^n f^{-n}(z).$$

- Jeśli dostatecznie dobrze oszacowaliśmy różnicę, to bez trudu stwierdzimy jednostajną zbieżność ciągu (h_n) w obszarze U, a potem holomorficzność i różnowartościowość funkcji granicznej.

- Ponieważ $h_n(f(z)) = 2h_{n-1}(z)$, więc graniczna funkcja h spełnia $h(f(z)) = 2h(z)$.

Propozycja druga

- Posłużyć się metodą dowodzenia pochodzącą od Cauchy'ego. Jej opis można znaleźć np. w drugim tomie „Rachunku różniczkowego i całkowego" G.M. Fichtenholza. Metoda użyta jest tam do dowodu analityczności funkcji odwrotnej do danej rzeczywistej funkcji analitycznej (działa też w przypadku zespolonym). Dowód ten znajduje się też tu: na stronach 5, 6 i 7 — to dla osób, które wolą ekran od książki.

- Poszukać formalnego rozwiązania h równania funkcyjnego $h(2z) = f(h(z))$, czyli szeregu potęgowego $h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ odkładając kwestię jego zbieżności na później.

- Powinno okazać się, że współczynnik b_n jest rozwiązaniem równania postaci
$$2^n b_n = 2b_n + \alpha_n(a_2, \ldots, a_{n-1}, b_2, \ldots, b_{n-1}).$$
Zauważyć, że jeśli $|a_n| \le \widehat{a}_n$ dla $n = 2, 3, \ldots$, to
$$|\alpha_n(a_2, \ldots, a_{n-1}, b_2, \ldots, b_{n-1})| \le |\alpha_n(\widehat{a}_2, \ldots, \widehat{a}_{n-1}, \widehat{b}_2, \ldots, \widehat{b}_{n-1})|,$$
gdzie $\widehat{b}_n$ jest zdefiniowane dla funkcji $2z + \sum \widehat{a}_n z^n$ w taki sam sposób jak b_n dla funkcji $2z + \sum a_n z^n$.

- A teraz to, co wielu studentów bardzo lubi. „Najgorszy przypadek". Należy wykazać istnienie takich dodatnich liczb rzeczywistych M, r, że dla każdego n zachodzi nierówność $|a_n| \le \frac{M}{r^n}$. Potem zająć się funkcją $\varphi(z) = 2z + M\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{r^n}$ dla $z \in D(0, r)$, gdzie $D(0, r) = \{z \in \mathbb{C}\colon \quad |z| < r\}$. Udowodnić, że istnieją: taka liczba $\varrho > 0$ i takie różnowartościowe przekształcenie analityczne $H\colon D(0, \varrho) \longrightarrow \mathbb{C}$, że $H(2z) = \varphi_a(H(z))$ dla każdego $z \in D(0, \varrho)$, $D(0, \varrho) = \{z \in \mathbb{C}\colon \quad |z| < \varrho\}$. Z istnienia takiego przekształcenia H wynika istnienie h, bo współczynniki szeregu Maclaurina funkcji H są większe od współczynników szeregu Maclaurina funkcji h.

- Wykazać istnienie H można dosyć łatwo. Wystarczy zauważyć, że dosyć podobne wzory służą do wyrażenia współczynników szeregu Maclaurina funkcji φ^{-1}, którą do funkcję możemy znaleźć dzięki wiedzy posiadanej przez niektórych studentów I roku naszego wydziału. I znów coś oszacować.

Zadanie 7. Udowodnić, że dyfeomorfizmy rozmaitości zwartej, których różniczki w ich punktach stałych nie mają wartości własnej 1, tworzą zbiór otwarty i gęsty w C^1–topologii w zbiorze wszystkich dyfeomorfizmów.

Zadanie 8. Punkt okresowy $\mathbf{p}$ o okresie n nazywamy hiperbolicznym wtedy i tylko wtedy, gdy moduły wartości własnych przekształcenia $Df^n(\mathbf{p})$ są różne od jedności. Udowodnić, że dyfeomorfizmy rozmaitości zwartej, których wszystkie punkty stałe są hiperboliczne, tworzą zbiór otwarty i gęsty w C^1–topologii w zbiorze wszystkich dyfeomorfizmów. Wykazać, że twierdzenie jest też prawdziwe dla zbioru dyfeomorfizmów, których punkty okresowe o okresie 12122013 są hiperboliczne.

Zadanie 9. Udowodnić, że dyfeomorfizmy okręgu, których wszystkie punkty okresowe są hiperboliczne, tworzą zbiór otwarty i gęsty w C^1–topologii w zbiorze wszystkich dyfeomorfizmów.

Zadanie 10. Udowodnić, że zbiór dyfeomorfizmów rozmaitości zwartej wymiaru większego od 1, których wszystkie punkty okresowe są hiperboliczne nie jest otwarty.

Zadanie 11. Udowodnić, że zbiór dyfeomorfizmów rozmaitości zwartej M wymiaru większego od 1, których wszystkie punkty okresowe są hiperboliczne ma niepuste wnętrze.

Wskazówka. Można rozważyć funkcję $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$, której wszytkie punkty krytyczne są niezdegenerowane. Jej gradient (wspomnienia z równań różniczkowych) generuje jednoparametrową grupę (φ_t) dyfeomorfizmów M. Interesującym obiektem może okazać się φ_1 zwłaszcza, jeśli hesjan, czyli $D^2 f$ w punktach krytycznych funkcji f ma wyznacznik różny od 0.