Kilka zadań z Układów Dynamicznych

12 listopada 2013

Czwarta seria

Zadanie 1. Podać przykład takiego homeomorfizmu $f\colon M \longrightarrow M$ zwartej przestrzeni metrycznej M, że dla dowolnych $x, y \in M$

$$d(f^n(x), f^n(y)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Zadanie 2. Niech f będzie homeomorfizmem okręgu. Sprawdzić, że liczbę obrotu $\rho(f)$ można zdefiniować w następujący, równoważny sposób:

$$\rho(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \#\big\{0 \le i \le n\colon \qquad f^i(x) \in \big[z, f(z)\big)\big\},$$

gdzie x, z są dowolnymi punktami okręgu $\mathbb{S}^1$, a $\big[z, f(z)\big)$ jest (domknięto–otwartym) łukiem w $\mathbb{S}^1$.

Zadanie 3. Niech $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ będzie homeomorfizmem zachowującym orientację, o liczbie obrotu α. Oznaczmy przez R_β obrót o kąt $\beta \neq 0$. Porównać liczby obrotu dla homeomorfizmów f i dla $R_\beta \circ f$. Sformułować założenia na f oraz/lub α, które gwarantują, że te liczby obrotu będą różne.

Zadanie 4. Niech $\mathcal{H}$ oznacza zbiór wszystkich homeomorfizmów okręgu $\mathbb{S}^1$, a $\mathcal{H}_+$ — zbiór homeomorfizmów okręgu zachowujących orientację. Niech

$$d(h_1, h_2) = \sup\{|h_1(z) - h_2(z)|\colon \quad z \in \mathbb{S}^1\}\,.$$

Udowodnić, że przekształcenia $(h_1, h_2) \mapsto h_1 \circ h_2$ i $h \mapsto h^{-1}$ są ciągłe.
Czy funkcja $\mathcal{H}_+ \ni h \mapsto \rho(h) \in [0, 1)$ przypisująca homemorfizmowi jego liczbę obrotu spełnia warunek Lipschitza?

Zadanie 5. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Mówimy, że przekształcenie $f\colon X \longrightarrow X$ jest *wrażliwe na warunki początkowe* (*sensitive dependence on initial conditions*), jeśli istnieje taka $\delta > 0$, że dla każdego $\varepsilon > 0$ i dla każdego $x \in X$ istnieje takie $y \in X$, że $d(x, y) < \varepsilon$ i $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$ dla pewnego $n > 0$.

Wskazać przekształcenię ciągłe $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, wrażliwe na warunki początkowe oraz przekształcenia ciągłe $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, różne od identyczności, niewrażliwe na warunki początkowe.

Sprawdzić, że automorfizm liniowy torusa $\mathbb{T}^2$, wyznaczony przez macierz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jest wrażliwy na warunki początkowe.

Znaleźć dyfeomorfizm torusa $\mathbb{T}^2$, różny od identyczności, niewrażliwy na warunki początkowe.