Kilka zadań z Układów Dynamicznych

23 października 2013

Trzecia seria

Zadanie 1. Wyznaczyć $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sin\sqrt{3}n$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \cos n$ oraz

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sin\sqrt{3}n + \cos n\right)$$

Zadanie 2. Pokazać, że jeśli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągłe i każdy punkt jest okresowy, to f^2 jest identycznością.

Zadanie 3. Rozpatrzmy przekształcenie którego wykres jest ńamiotem": $F : [0,1] \longrightarrow [0,1]$,

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla} \quad x \in (0, \frac{1}{2}] \\ 2-2x & \text{dla} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

Wykazać że punkt x jest preokresowy (to znaczy: któryś jego obraz jest okresowy) wtedy i tylko wtedy gdy $x \in \mathbb{Q}$. Wykazać że x jest okresowy wtedy i tylko wtedy gdy x jest postaci $\frac{2k}{p}$, gdzie k jest liczbą naturalna, a p jest liczbą naturalną nieparzystą.

Definicja. Topologiczne sprzężenie. Niech $X-$ przestrzeń topologiczna. Mówimy że przekształcenia ciągłe $f\colon X \longrightarrow X$, $g\colon X \longrightarrow X$ są *topologicznie sprzężone* jeśli istnieje homeomorfizm $h\colon X \longrightarrow X$ taki że $f \circ h = h \circ g$.

Zadanie 4. Które pary poniższych przekształceń $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ są topologicznie sprzężone?

a. $f(x) = x/2$, b. $f(x) = 2x$, c. $f(x) = -2x$,
d. $f(x) = 5x$, e. $f(x) = x^3$.

Które przekształcenia można sprząc dyfeomorfizmem?

Zadanie 5. Wypisać wzorem sprzężenie topologiczne $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pomiędzy przekształceniem $f(x) = ax^2 - 1$ oraz przekształceniem $g(x) = x^2 - c$ (dla pewnego c zależnego od a).

Zadanie 6. Rozważmy takie homeomorfizmy $f, g\colon [0;1] \longrightarrow [0;1]$, że $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = g(1) = 1$, i f, g nie mają innych punktów stałych. Wykazać że f i g są topologicznie sprzężone. Wskazówka: można założyc (dlaczego?) że $f(x) > x, g(x) > x$ dla $x \in (0,1)$. Wybierzmy punkt $x_0 \in (0,1)$ i odcinki $I_f = [x_0, f(x_0)]$, $I_g = [x_0, g(x_0)]$. Przekształćmy I_f na I_g jakimś rosnącym homeomorfizmem h. Jak rozszerzyć h na cały odcinek $[0,1]$, aby otrzymać żądane sprzężenie?

Zadanie 7. Rozpatrzmy rodzinę przekształceń kwadratowych $f_a\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $a \in (0,4)$:

$$f_a(x) = ax(1-x)\,.$$

Wykazać że dla dowolnych $a_1, a_2 \in (1,2)$ przekształcenia f_{a_1} oraz f_{a_2} są topologicznie sprzężone. Wykazać że przekształcenia f_3 i f_4 nie są topologicznie sprzężone.