Kilka zadań z Układów Dynamicznych

17 października 2013

Druga seria

Twierdzenie Sarda w przestrzeni euklidesowej
Jeśli $f\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ jest odwzorowaniem klasy C^∞, to miara zbioru

$$V = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell \colon \quad \exists_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k}\, \mathbf{y} = \mathrm{f}(\mathbf{x}) \ \text{ i } \ \mathrm{Df}(\mathbf{x})(\mathbb{R}^k) \subsetneq \mathbb{R}^\ell\}$$

jest równa 0. □

Punkty zbioru V zdefiniowanego w twierdzeniu Sarda nazywamy wartościami krytycznymi funkcji f. Twierdzenie Sarda mówi więc, że zbiór wartości krytycznych odwzorowania gładkiego ma miarę 0.

Definicja rozmaitości
Przestrzeń topologiczna $M \neq \emptyset$ nazywana jest m–wymiarową rozmaitością klasy C^r, $r \geq 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $\mathbf{p} \in \mathrm{M}$ istnieje takie otoczenie U otwarte w M i taki homeomorfizm (mapa) $\varphi\colon U \longrightarrow \varphi(U)$ na otwarty w $\mathbb{R}^m$ zbiór $\varphi(U)$, że jeśli $\varphi_i\colon U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i)$ i $\varphi_j\colon U_j \longrightarrow \varphi_j(U_j)$ są dwiema mapami, to przekształcenie $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ jest dyfeomorfizmem klasy C^r zbioru $\varphi_j(U_j \cap U_i)$ na zbiór $\varphi_i(U_j \cap U_i)$.
Rozmaitości klasy C^0 nazywane bywają topologicznymi, a rozmaitości klasy C^∞ — gładkimi. □

Definicja przekształceń różniczkowalnych na rozmaitościach
Jeśli $M_1,\ M_2$ są rozmaitościami klasy C^r, to $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$ jest klasy C^r wtedy i tylko wtedy. gdy dla dowolnych map $\varphi\colon U \longrightarrow \varphi(U)$, $U \subseteq M_1$, $\psi\colon V \longrightarrow \psi(V)$, $v \subseteq M_2$, przekształcenie $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ jest klasy C^r.[1] □
Definicja krzywej
Krzywą klasy C^r przechodzącą przez punkt $\mathbf{p} \in \mathrm{M}$ nazywamy dowolne przekształcenie $\gamma\colon (a,b) \longrightarrow M$ klasy C^r, w którego obrazie znajduje się punkt $\mathbf{p}$. □

Zmierzamy do zdefiniowania wektorów stycznych do krzywej w punkcie $\mathbf{p}$. W tym celu definiujemy relację równoważności w zbiorze krzywych przechodzących przez punkt $\mathbf{p}$. Dwie takie krzywe $\gamma_1\colon (-1,1) \longrightarrow M$, $\gamma_2\colon (-1,1) \longrightarrow M$, że $\gamma_1(0) = \mathbf{p} = \gamma_2(0)$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej mapy (u,φ) określonej w otoczeniu U punktu $\mathbf{p}$ zachodzi równość

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)\,.$$

Można łatwo sprawdzić, że zdefiniowana wyżej relacja jest równoważnością oraz że jeśli równość $(\varphi\circ\gamma_1)'(0) = (\varphi\circ\gamma_2)'(0)$ zachodzi dla jednej mapy φ zdefiniowanej w otoczeniu punktu $\mathbf{p}$,

[1] Oczywiście dziedzina przekształcenia $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, czyli $\varphi(u \cap v)$, bywa czasem pusta.

to dla każdej mapy ψ zdefiniowanej w otoczeniu punktu $\mathbf{p}$ zachodzi odpowiednia równość $(\psi\circ\gamma_1)'(0) = (\psi\circ\gamma_2)'(0)$.

Definicja wektorów stycznych w danym punkcie rozmaitości
Klasę równoważności zdefiniowanej tuż przed tą definicją równoważności nazywamy wektorem stycznym do rozmaitości M w punkcie $\mathbf{p}$. $\square$

Definicja pozwala na zdefiniowanie sumy wektorów. Jeśli $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ są wektorami stycznymi w punkcie $\mathbf{p}$ zdefiniowanymi za pomocą krzywych γ_1 i γ_2, a φ jest dowolną mapą określoną w otoczeniu punktu $\mathbf{p}$, to sumę wektorów określa krzywa $\varphi^{-1}(\varphi\circ\gamma_1+\varphi\circ\gamma_2)$. Jest jasne, że ta definicja nie zależy od wyborów mapy ani reprezentantów klas równoważności definiujących wektory styczne. Podobnie definiujemy mnożenie wektorów przez liczby. Otrzymujemy przestrzeń liniową wymiaru $m = \dim M$

Zbiór wszystkich wektorów stycznych do rozmaitości M w punkcie $\mathbf{p}$ oznaczamy symbolem $T_{\mathbf{p}}M$.

Bez problemu definiujemy obraz wektora stycznego przy odwzorowaniu $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$. Po prostu zamiast krzywej γ definiującej wektor $\mathbf{v}\in \mathrm{T}_{\mathbf{p}}\mathrm{M}_1$ rozważyć należy krzywą $f\circ\gamma$ i ona definiuje obraz wektora $\mathbf{v}$ styczny do M_2 w punkcie $f(\mathbf{p})$. Ten obraz oznaczamy symbolem $Df(\mathbf{p})\mathbf{v}$, co ma sens nie tylko formalny, bo uznawszy, że współrzędnymi wektora $\mathbf{v}$ w mapie φ są współrzędne wektora $(\varphi\circ\gamma)'(0)$, trzeba uznać że współrzędnymi jego obrazu w mapie ψ zdefiniowanej w otoczeniu punktu $f(\mathbf{p})$ są współrzędne wektora

$$(\psi\circ f\circ\gamma)'(0) = (\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\gamma)'(0) = D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(\mathbf{p}))\cdot(\varphi\circ\gamma)'(0)\,.$$

$D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(\mathbf{p}))$ to przekształcenie liniowe z $\mathbb{R}^{m_1}$ do $\mathbb{R}^{m_2}$. Przekształca ono wektory styczne do $\mathbb{R}^{m_1}$ w wektory styczne do $\mathbb{R}^{m_2}$, ale te pierwsze traktować należy jako wektory styczne do M_1 w punkcie $\mathbf{p}$ wyrażone za pomocą mapy φ, a te drugie jako wektory styczne do M_2 w punkcie $f(\mathbf{p})$. Wtedy przekształcenie $D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(\mathbf{p}))$ traktować trzeba jako opis przekształcenia liniowego z $T_{\mathbf{p}}M_1$ do $T_{f(\mathbf{p})}M_2$.

Dodajmy na koniec tego szybkiego przeglądu podstawowych pojęć związanych z rozmaitościami, że na wektory styczne można i często należy patrzeć jak na operację przypisującą funkcji różniczkowalnej pochodną w kierunku danego wektora. Niech $\alpha\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ oznacza funkcję różniczkowalną w punkcie $\mathbf{p}\in \mathrm{M}$, i niech $\mathbf{v}\in\mathrm{T}_{\mathbf{p}}\mathrm{M}$. Przez $D_{\mathbf{v}}\alpha$ oznaczamy liczbę $(\alpha\circ\gamma)'(0)$, gdzie γ jest dowolną taką krzywą klasy C^1, że $\gamma(0)=\mathbf{p}$. Jasne jest, że operacja $D_{\mathbf{v}}$ jest $\mathbb{R}$–liniowym funkcjonałem określonym na przestrzeni funkcji różniczkowalnych na M spełniającym dodatkowo warunek na pochodną iloczynu $D_{\mathbf{v}}(\alpha\cdot\beta) = D_{\mathbf{v}}(\alpha)\cdot\beta(\mathbf{p})+\alpha(\mathbf{p})\cdot \mathrm{D}_{\mathbf{v}}(\beta)$. Takie odwzorowania liniowe nazywane są bardzo często **różniczkowaniami** (w punkcie $\mathbf{p}$). Często wektory styczne do rozmaitości definiowane są właśnie jako różniczkowania.

Zadanie 1. Niech $\alpha\colon\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ oznacza funkcję klasy C^∞. Udowodnić, że istnieją takie funkcje $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$, że $\alpha(x_1,x_2,\dots,x_m) = \alpha(0,0,\dots,0)+\sum_{j=1}^m x_j\alpha_j(x_1,x_2,\dots,x_m)$ oraz $\alpha_j(0,0,\dots,0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0,0,\dots,0)$ dla $j=1,2,\dots,m$.

Zadanie 2. Niech $C^\infty(\mathbb{R}^m,0)$ oznacza zbiór wszystkich takich funkcji α klasy C^∞, że $\alpha(0,\dots,0)=0$. Udowodnić, że zbiór różniczkowań określonych na $C^\infty(\mathbb{R}^m,0)$ czyli takich przekształceń $\mathbb{R}$–liniowych $D\colon C^\infty(\mathbb{R}^m,0)\longrightarrow\mathbb{R}$, że $D(\alpha\cdot\beta) = D(\alpha)\cdot\beta(0)+\alpha(0)\cdot D(\beta)$, jest m–wymiarową przestrzenią liniową.

Zadanie 3. Niech $C^r(\mathbb{R}^m, 0)$ oznacza zbiór wszystkich takich funkcji α klasy C^r, $1 \le r < \infty$, że $\alpha(0, \dots, 0) = 0$. Udowodnić, że zbiór różniczkowań określonych na $C^r(\mathbb{R}^m, 0)$ czyli takich przekształceń $\mathbb{R}$–liniowych $D\colon C^r(\mathbb{R}^m, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$, że $D(\alpha \cdot \beta) = D(\alpha) \cdot \beta(0) + \alpha(0) \cdot D(\beta)$, jest nieskończenie wymiarową przestrzenią liniową.

Zadanie 4. A będzie macierzą nieosobliwą wymiaru $m \times m$, a $P\colon S^{m+1} \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ rzutem stereograficznym z „bieguna północnego”:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{m+1}}, \frac{x_2}{1 - x_{m+1}}, \dots, \frac{x_m}{1 - x_{m+1}} \right)$$

Niech $f_A(\mathbf{x}) = \mathrm{P}^{-1}(\mathrm{AP}(\mathbf{x}))$ dla $\mathbf{x} \in \mathrm{S}^{m+1} \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1)$ i $f_A(0, 0, \dots, 0, 1) = (0, 0, \dots, 0, 1)$.
Udowodnić, że $f_A\colon S^m \longrightarrow S^M$ jest homeomorfizmem.
Dla jakich macierzy przekształcenie f_A jest gładkie?

Definicja zbiorów miary zero
Zbiór $A \subseteq M$ ma miarę 0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej mapy (U, φ) m–wymiarowa miara Lebesgue'a zbioru $\varphi(A \cap U) \subseteq \mathbb{R}^m$ jest równa 0. $\square$

Definicja wartości krytycznych regularnych
Jeśli $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$ jest odwzorowaniem klasy C^1, to wartością krytyczną nazywamy każdy punkt $\mathbf{y} \in \mathrm{M}_2$, dla którego istnieje taki punkt $\mathbf{x} \in \mathrm{M}_1$, że przekształcenie $DF(\mathbf{x})$ nie przekształca przestrzeni $T_{\mathbf{x}}M_1$ na przestrzeń $T_{\mathbf{y}}M_2$. Jeśli $\mathbf{y} \in \mathrm{M}_2$ nie jest wartością krytyczną, to nazywamy go wartością regularną nawet wtedy, gdy $f^{-1}(\mathbf{y}) = \emptyset$. $\square$

Z twierdzenia o funkcjach uwikłanych wynika, że niepuste przeciwobrazy wartości regularnych przekształcenia $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$ są rozmaitościami wymiaru $m_1 - m_2$.

O przeciwobrazach wartości krytycznych czasem coś się daje powiedzieć, ale mogą one być dowolnymi zbiorami domkniętymi w M_1 (twierdzenie o najpaskudniejszej poziomicy).

Twierdzenie Sarda dla rozmaitości gładkich
Jeśli $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$ jest odwzorowaniem klasy C^∞, to miara zbioru wartości krytycznych jest równa jest równa 0. $\square$

Zadanie 5. Udowodnić, że jeśli $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ jest przekształceniem gładkim rozmaitości zwartej M wymiaru m i $\ell \ge 2m$, $\{(U_j, \varphi_j)\}$ jest atlasem na M, $\{C_j\}$ jest zwartym pokryciem M, przy czym $C_j \subseteq U_j$, to dla każdej liczby $\varepsilon \ge 0$ istnieje przekształcenie $g\colon M \longrightarrow R^\ell$, że dla każdego $\mathbf{x} \in \mathrm{M}$ różniczka $Dg(\mathbf{x})\colon \mathrm{T}_{\mathbf{x}}\mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ ma zerowe jądro oraz dla każdego $\mathbf{x} \in \mathrm{C_j}$ zachodzą nierówności $\|f(\mathbf{x}) - \mathrm{g}(\mathbf{x})| < \varepsilon$ i $\|D(f \circ \varphi_j^{-1})(\varphi_j(\mathbf{x})) - \mathrm{D}(\mathrm{g} \circ \varphi_{\mathrm{j}}^{-1})(\varphi_{\mathrm{j}}(\mathbf{x}))\| < \varepsilon\|$

Zadanie 6. Udowodnić, że jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^2, to dla każdej funkcji ciągłej $\varepsilon\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ istnieje taka funkcja $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy C^2, że

$$|f^{(i)}(x) - g^{(i)}(x)| < \varepsilon|$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz jeśli dla pewnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $g'(x) = 0$, to zachodzi też nierówność $g''(x) \ne 0$ — wszystkie punkty krytyczne funkcji g są niezdegenerowane, w szczególności jest ich niezbyt wiele, ile?.
Sformułować i udowodnić twierdzenie dla funkcji $f\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$.

Zadanie 7. Udowodnić, że jeśli A jest macierzą wymiaru $m \times m$ o współczynnikach całkowitych $\det(A) = d \neq 0$ a $T_A \colon T^m \longrightarrow T^m$ jest przekształceniem m–wymiarowego torusa $T^m = \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$, to każdy punkt T^m ma dokładnie m przeciwobrazów przy przekształceniu T_A.

Zadanie 8. Udowodnić, że jeśli A jest macierzą wymiaru $m \times m$ o współczynnikach całkowitych $\det(A) = d \neq 0$ a $T_A \colon T^m \longrightarrow T^m$ jest przekształceniem m–wymiarowego torusa $T^m = \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$, to zbiór punktów okresowych przekształcenia T_A jest gęsty w T^m.
Opisać w sensowny i krótki sposób punkty okresowe T_A.

Zadanie 9. Niech ℓ^2 będzie przestrzenia złożoną z ciągów (a_n) sumowalnych z kwadratami $(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty)$. Udowodnić, że istnieje funkcja $f \colon \ell^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy C^∞, której zbiór wartości krytycznych jest całą prostą.
Oznacza to, że nie da się łatwo uogólnić twierdzenia Sarda na przestrzenie nieskończenie wymiarowe. Pewne uogólnienia są znane, ale o nich nie będziemy mówić.