Kilka zadań z Układów Dynamicznych

3 października 2013

Pierwsza seria

Zadanie 1. Niech $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$. Niech φ_A, φ_B oznaczają przekształcenia dwuwymiarowego torusa $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ indukowane przez macierze A i B. Znaleźć punkty okresowe przekształceń φ_A i φ_B.

Zadanie 2. Niech $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, Niech φ_A oznacza przekształcenie czterowymiarowego torusa $\mathbb{T}^4 = \mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$ indukowane przez macierz A. Znaleźć punkty okresowe przekształcenia φ_A.

Zadanie 3. **a)** Niech T_α oznacza obrót o kąt α, $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ okręgu S^1, $L \subseteq S^1$ — dowolny łuk okręgu S^1. Udowodnić, że dla każdego punktu $z \in S^1$ zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} \#\{0 \leq i < n\colon \quad T_\alpha^i(z) \in L\} = \frac{|L|}{|S^1|}\,,$$

$|L| = \ell_{S^1}(L)$ — to długość łuku L, $\#(C)$ — to liczba elementów zbioru C.
b) Niech $f\colon S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Dowieść, że

$$\frac{1}{n}\sum f \circ T_\alpha^i \rightrightarrows \frac{1}{\ell_{S^1}(S^1)} \int_{S^1} f d\ell_{S^1}\,.$$

Zadanie 4. Udowodnić, że jeśli funkcja $f\colon S^1 \longrightarrow S^1$ jest ciągła, to istnieje taka funkcja ciągła $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $f(e^{2\pi it}) = e^{2\pi iF(t)}$ dla każdej liczby $t \in \mathbb{R}$. Wtedy $F(t+1) - F(t) = \mathrm{const} \in \mathbb{Z}$. Jeśli G jest funkcją spełniającą warunek $f(e^{2\pi it} = e^{2\pi iG(t)}$, to funkcja $G - F$ jest stała, a jej jedyna wartość jest liczbą całkowitą.
Liczba $F(t+1) - F(t)$ nazywana jest stopniem przekształcenia f, F zwane jest podniesieniem przekształcenia f.

Zadanie 5. Udowodnić, że jeśli funkcja $f\colon S^1 \longrightarrow S^1$ jest ciągła i różnowartościowa, to $|F(t+1)-F(t)| = 1$, gdzie F oznacza funkcję opisaną w zadaniu poprzednim.

Definicja. Niech $f\colon X \longrightarrow X$ będzie ciągłym przekształceniem przestrzeni metrycznej (topologicznej) X. Niech $f^0 = \mathrm{id}$, $f^{n+1} = f^n \circ f$ dla $n = 0, 1, 2 \ldots$.
Punktem ω–granicznym trajektorii punktu $x \in X$ nazywamy punkt $y \in X$, dla którego istnieje taki ciąg liczb naturalnych (n_k) zbieżny do $+\infty$, że $y = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x)$. Zbiór punktów ω–granicznych trajektorii punktu $x \in X$ oznaczamy symbolem $\omega(x)$, czasem $\omega_f(x)$.
Analogicznie definiujemy punkty α–graniczne: zamiast $n_k \to +\infty$ mamy w tym wypadku $n_k \to -\infty$. Zbiór punktów α–granicznych trajektorii punktu $x \in X$ oznaczamy symbolem $\alpha(x)$, czasem $\alpha_f(x)$. $\square$

Zadanie 6. Niech f będzie zachowującym orientację homeomorfizmem prostej. Udowodnić, że zbiór punktów ω–granicznych każdej trajektorii jest pusty lub jednoelementowy.
Jak jest w wypadku zmieniającego orientację homeomorfizmu prostej?

Zadanie 7. Czym jest zbiór punktów ω–granicznych w wypadku obrotu okręgu?

Zadanie 8. Udowodnić, że $f(\omega(x)) = \omega(x)$ dla każdego homeomorfizmu f.

Zadanie 9. Jeśli f jest homeomorfizmem i trajektoria w przód punktu x jest zbiorem zwartym, to punkt x jest okresowy, tzn. istnieje wtedy taka liczba naturalna $p \geq 1$, że $f^p(x) = x$.

Zadanie 10. Niech $F(x) = x + \frac{1}{10}\sin(2\pi x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Definiujemy funkcję $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ wzorem $f(e^{2\pi it}) = e^{2\pi iF(t)}$. Znaleźć $\omega_f(z)$ i $\alpha_f(z)$ w zależności od punktu $z \in S^1$.

Zadanie 11. Niech $F(x) = x+\frac{1}{100}\sin^2(17\pi x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Definiujemy funkcję $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ wzorem $f(e^{2\pi it}) = e^{2\pi iF(t)}$. Znaleźć $\omega_f(z)$ i $\alpha_f(z)$ w zależności od punktu $z \in S^1$.

Zadanie 12. Niech $F(x) = x+\frac{1}{100}\sin^2(17\pi x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Definiujemy funkcję $f\colon S^1 \longrightarrow S^1$ wzorem $f(e^{2\pi it}) = e^{2\pi iF(t)}$. Udowodnić, że nie istnieje taki homeomorfizm $g\colon S^1 \longrightarrow S^1$, że $f = g \circ g$.

Zadanie 13. Niech (a_n) będzie takim ciągiem nieujemnych liczb rzeczywistych, że dla dowolnych liczb naturalnych m, n zachodzi nierówność $a_{m+n} \leq a_m + a_n + 1$. Udowodnić, że istnieje granica $\lim \frac{a_n}{n}$.

Zadanie 14. Niech $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie takim homemorfizmem prostej, ściśle rosnącym, że $F(x+1) = F(x) + 1$ dla $x \in \mathbb{R}$. Dowieść, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje granica $\lim \frac{1}{n} F^n(x)$ i nie zależy ona od wyboru punktu x.

Definicja. Część ułamkowa granicy, o której mowa w tym zadaniu nazywana jest liczbą obrotu przekształcenia $f\colon S^1 \longrightarrow S^1$ zdefiniowanego wzorem $f(e^{2\pi it}) = e^{2\pi iF(t)}$. $\square$

Zadanie 15. Udowodnić, że liczba obrotu homemorfizmu $f\colon S^1 \longrightarrow S^1$ jest równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy f ma punkt stały, tzn. istnieje taki punkt $p \in S^1$, że $f(p) = p$.

Zadanie 16. Udowodnić, że liczba obrotu homemorfizmu $f\colon S^1 \longrightarrow S^1$ jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy f ma punkt okresowy, tzn. istnieje taki punkt $p \in S^1$, że $f^k(p) = p$ dla pewnej liczby naturalnej k — okresu punktu p.

Zadanie 17. Udowodnić, że jeśli $h\colon S^1 \longrightarrow S^1$ jest zachowującym orientację homeomorfizmem okręgu, to liczba obrotu homeomorfizmu f jest równa liczbie obrotu homeomorfizmu $h \circ f \circ h^{-1}$.

Zadanie 18. Udowodnić, ze jeśli liczba obrotu jest niewymierna, to równość $\omega(z_1) = \omega(z_2)$ zachodzi dla dowolnych $z_1, z_2 \in S^1$.