Kilka zadań z Układów Dynamicznych

14 stycznia 2015

Trzecia seria

Zadanie 1. Niech $f(x,y,z) = (ax, ac(y+\varepsilon xz), cz$, $0 < c < 1 < ac$, $0 < \varepsilon$ oraz $g(x,y,z) = (ax, acy, cz)$. Dowieść, że równość: $f^n(x,y,z) = \big(a^n x, (ac)^n(y+n\varepsilon xz), c^n z\big)$ zachodzi dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, w szczególności $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest dyfeomorfizmem. Znaleźć zbiory $W^s(0,0,0) = \{(x,y,z)\colon \lim_{n\to\infty} f^n(x,y,z) = (0,0,0)\}$ i $W^u(0,0,0) = \{(x,y,z)\colon \lim_{n\to-\infty} f^n(x,y,z) = (0,0,0)\}$. Udowodnić, że nie istnieje taki dyfeomorfizm $h\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, klasy C^1, że $h \circ f = g \circ h$.

Uwaga. Homeomorfizm h sprzęgający f i g istnieje — jest to treścią twierdzenia Grobmana – Hartmana.

Wskazówka. Kłopotów z gładkością homeomorfizmu h należy spodziewać się w punktach zbioru $W^u(0,0,0) \cup W^s(0,0,0)$.

Zadanie 2. Niech $\tilde{f}(z) = \frac{az+b}{bz+a}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Sprawdzić, że $|z| = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|\tilde{f}(z)| = 1$. Znaleźć punkty stałe przekształcenia $\tilde{f}\colon S^1 \longrightarrow S^1$ oraz pochodne $\tilde{f}(z)$ w punktach stałych $\tilde{f}$. Niech $f(z,t) = (\tilde{f}(z), ct)$ dla wszystkich $(z,t) \in S^1 \times \mathbb{R}$ i ustalonej liczby $c \in (0,1)$. Dyfeomorfizm f przekształca $S^1 \times \mathbb{R}$ na siebie.
Udowodnić, że jeżeli $\varepsilon > 0$ jest dostatecznie małą liczbą, $g\colon S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ oraz $\|g(z,t) - f(z,t)\| < \varepsilon$ i $\|Dg(z,t) - Df(z,t)\| < \varepsilon$, to istnieje funkcja ciągła $\varphi\colon S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$, której wykres jest przekształcany przez odwzorowanie g na siebie.
Wykazać, że funkcja φ nie musi być różniczkowalna, ale jeśli c jest dostatecznie małe, to jest różniczkowalna. Jak małe powinno być c?

Zadanie 3. Dla jakich macierzy A rozmiaru 2×2 istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że jeśli $\|A - B\| < \varepsilon$, to istnieje taki homeomorfizm $h\colon \mathbb{R}^2 \xrightarrow{na} \mathbb{R}^2$, że $h(A\mathbf{x}) = Bh(\mathbf{x})$ dla każdego punktu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Zadanie 4. Niech $T\colon X \longrightarrow X$ będzie przekształceniem zachowującym probabilistyczną miarę μ określoną na pewnym przeliczalnie addytywnym ciele podzbiorów przestrzeni X, tzn. $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$ dla każdego mierzalnego zbioru $B \subseteq X$. Udowodnić, że dla każdego zbioru mierzalnego $A \subseteq X$ i dla prawie każdego $a \in A$ istnieje nieskończenie wiele takich liczb $n \in \mathbb{N}$, że $T^n(a) \in A$.

Zadanie 5. Niech $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Wykazać, że choć wśród wartości własnych macierzy M są liczby o wartości bezwzglednej 1, to jednak nie ma pierwiastków (żadnego stopnia) z liczby 1.