Kilka zadań z Układów Dynamicznych

19 listopada 2014

Trzecia seria

Zadanie 1. Definiujemy przekształcenia $g\colon [0.1] \to [0,1]$ oraz $g_a\colon [0,1] \to [0,1]$ $(a \in (0,1))$, wzorami:
$$g(x) = (2x)_{\mathrm{mod}1},$$

$$g_a(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} & \text{dla} \quad x \in [0,a) \\ \frac{x-a}{1-a} & \text{dla} \quad x \in [a,1] \end{cases}.$$

1. Sprawdzić, że przekształcenia g, g_a zachowują miarę Lebesgue'a na odcinku $[0,1]$.
2. Wykazać, że przekształcenia g_a i g, traktowane jako przekształcenia $[0,1] \to [0,1]$ są topologicznie sprzężone.
3. Niech homeomorfizm $h_a\colon [0,1] \to [0,1]$ będzie sprzężeniem między g oraz g_a, tzn.
$$h_a \circ g_a = g \circ h_a.$$
Wykazać, że miara $\mu_a = (h_a)_*(l)$ (czyli obraz miary Lebesgue'a przy przekształceniu h_a) jest niezmiennicza dla g.
4. Mamy więc nieprzeliczalnie wiele różnych miar niezmienniczych dla g, wszystkie bezatomowe, o nośniku (topologicznym) będącym całym odcinkiem. Wykazać, że miary μ_a są faktycznie parami różne.
5. Wykazać, że miary μ_a są parami singularne.

Zadanie 2. Niech $a_2, a_3, \ldots$ będą dowolnymi liczbami zespolonymi, dla których szereg $\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ma dodatni promień zbieżności. Niech $f(z) = 2z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ dla tych $z \in \mathbb{C}$, dla których szereg $\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny. Udowodnić, że istnieją: taka liczba $\varrho > 0$ i takie różnowartościowe przekształcenie analityczne $h\colon D(0,\varrho) \longrightarrow \mathbb{C}$, że $h(2z) = f(h(z))$ dla każdego $z \in D(0,\varrho)$, $D(0,\varrho) = \{z \in \mathbb{C}\colon \quad |z| < \varrho\}$.

Wskazówka. Dwie propozycje rozwiązania tego zadania.

Propozycja pierwsza

- Zauważyć, że istnieje otoczenie V zera, na którym f jest odwracalne. Niech $U = f(V)$ i niech $f^{-1}\colon U \to V$ będzie przekształceniem odwrotnym; można założyć, że $|(f^{-1})'| < \frac{2}{3}$ na zbiorze U, więc również $f^{-1}(U) \subset U$. W dalszym ciągu f^{-n} oznacza n–krotne złożenie $\underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}}_{n \text{ liter } f}$ funkcji f^{-1}.

- Rozważamy ciąg przekształceń $h_n\colon U \to \mathbb{C}$,
$$h_n(z) = 2^n \cdot f^{-n}(z).$$

- Wówczas h_n jest holomorficznym dyfeomorfizmem (czyli biholomorfizmem) U na zbiór $h_n(U)$, $h_n(0) = 0$, $(h_n)'(0) = 1$.

- Można oszacować różnicę:
$$h_{n+1}(z) - h_n(z) = 2^{n+1} f^{-(n+1)}(z) - 2^n f^{-n}(z) =$$
$$2^{n+1}\left(\tfrac{1}{2} f^{-(n)}(z) + O(|f^{-n}(z)|^2)\right) - 2^n f^{-n}(z).$$

- Jeśli dostatecznie dobrze oszacowaliśmy różnicę, to bez trudu stwierdzimy jednostajną zbieżność ciągu (h_n) w obszarze U, a potem holomorficzność i różnowartościowość funkcji granicznej.

- Ponieważ $h_n(f(z)) = 2h_{n-1}(z)$, więc graniczna funkcja h spełnia $h(f(z)) = 2h(z)$.

Propozycja druga

- Posłużyć się metodą dowodzenia pochodzącą od Cauchy'ego. Jej opis można znaleźć np. w drugim tomie „Rachunku różniczkowego i całkowego” G.M. Fichtenholza. Metoda użyta jest tam do dowodu analityczności funkcji odwrotnej do danej rzeczywistej funkcji analitycznej (działa też w przypadku zespolonym). Dowód ten znajduje się też tu: na stronach 5, 6 i 7 — to dla osób, które wolą ekran od książki.

- Poszukać formalnego rozwiązania h równania funkcyjnego $h(2z) = f(h(z))$, czyli szeregu potęgowego $h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ odkładając kwestię jego zbieżności na później.

- Powinno okazać się, że współczynnik b_n jest rozwiązaniem równania postaci
$$2^n b_n = 2b_n + \alpha_n(a_2, \ldots, a_{n-1}, b_2, \ldots, b_{n-1}).$$
Zauważyć, że jeśli $|a_n| \le \widehat{a}_n$ dla $n = 2, 3, \ldots$, to
$$|\alpha_n(a_2, \ldots, a_{n-1}, b_2, \ldots, b_{n-1})| \le |\alpha_n(\widehat{a}_2, \ldots, \widehat{a}_{n-1}, \widehat{b}_2, \ldots, \widehat{b}_{n-1})|,$$
gdzie $\widehat{b}_n$ jest zdefiniowane dla funkcji $2z + \sum \widehat{a}_n z^n$ w taki sam sposób jak b_n dla funkcji $2z + \sum a_n z^n$.

- A teraz to, co wielu studentów bardzo lubi. „Najgorszy przypadek”. Należy wykazać istnienie takich dodatnich liczb rzeczywistych M, r, że dla każdego n zachodzi nierówność $|a_n| \le \frac{M}{r^n}$. Potem zająć się funkcją $\varphi(z) = 2z + M\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{r^n}$ dla $z \in D(0,r)$, gdzie $D(0,r) = \{z \in \mathbb{C}\colon \quad |z| < r\}$. Udowodnić, że istnieją: taka liczba $\varrho > 0$ i takie różnowartościowe przekształcenie analityczne $H\colon D(0,\varrho) \longrightarrow \mathbb{C}$, że $H(2z) = \varphi_a(H(z))$ dla każdego $z \in D(0,\varrho)$, $D(0,\varrho) = \{z \in \mathbb{C}\colon \quad |z| < \varrho\}$. Z istnienia takiego przekształcenia H wynika istnienie h, bo współczynniki szeregu Maclaurina funkcji H są większe od współczynników szeregu Maclaurina funkcji h.

- Wykazać istnienie H można dosyć łatwo. Wystarczy zauważyć, że dosyć podobne wzory służą do wyrażenia współczynników szeregu Maclaurina funkcji φ^{-1}, którą do funkcję możemy znaleźć dzięki wiedzy posiadanej przez niektórych studentów I roku naszego wydziału. I znów coś oszacować.

Zadanie 3. Punkt okresowy $\mathbf{p}$ o okresie n nazywamy hiperbolicznym wtedy i tylko wtedy, gdy moduły wartości własnych przekształcenia $Df^n(\mathbf{p})$ są różne od jedności. Udowodnić, że dyfeomorfizmy rozmaitości zwartej, których wszystkie punkty stałe są hiperboliczne, tworzą zbiór otwarty i gęsty w C^1–topologii w zbiorze wszystkich dyfeomorfizmów. Wykazać, że twierdzenie jest też prawdziwe dla zbioru dyfeomorfizmów, których punkty okresowe o okresie 12122013 są hiperboliczne.

Zadanie 4. Udowodnić, że dyfeomorfizmy okręgu, których wszystkie punkty okresowe są hiperboliczne, tworzą zbiór otwarty i gęsty w C^1–topologii w zbiorze wszystkich dyfeomorfizmów.

Zadanie 5. Udowodnić, że zbiór dyfeomorfizmów rozmaitości zwartej wymiaru większego od 1, których wszystkie punkty okresowe są hiperboliczne nie jest otwarty.

Zadanie 6. Udowodnić, że zbiór dyfeomorfizmów rozmaitości zwartej M wymiaru większego od 1, których wszystkie punkty okresowe są hiperboliczne ma niepuste wnętrze.

Wskazówka. Można rozważyć funkcję $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$, której wszytkie punkty krytyczne są niezdegenerowane. Jej gradient (wspomnienia z równań różniczkowych) generuje jednoparametrową grupę (φ_t) dyfeomorfizmów M. Interesującym obiektem może okazać się φ_1 zwłaszcza, jeśli hesjan, czyli D^2f w punktach krytycznych funkcji f ma wyznacznik różny od 0.

Zadanie 7. Niech $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie takim dyfeomorfizmem klasy C^r, $1 \le r \le \infty$, przestrzeni euklidesowej na siebie, że $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Wykazać, że dla każdego dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ istnieje taki dyfeomorfizm g, że $f(x) = g(x)$, gdy $\|x\| \ge \varepsilon$ i $g(x) = Df(\mathbf{0})\mathbf{x}$, gdy $\|\mathbf{x}\| \le \delta$, gdzie δ jest dostatecznie małą liczbą dodatnią oraz $\|f(\mathbf{x}) - \mathrm{g}(\mathbf{x})\| < \varepsilon$ i $\|Df(\mathbf{x}) - \mathrm{Dg}(\mathbf{x})\| < \varepsilon$.
Czy twierdzenie jest prawdziwe w klasie przekształceń analitycznych?
Czy twierdzenie można wzmocnić pisząc $\|D^j f(\mathbf{x}) - \mathrm{D^j g}(\mathbf{x})\| < \varepsilon$ dla każdego $\mathbf{x}$ i każdego $j = 0, 1, \ldots, r$?

Zadanie 8. Niech $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie takim dyfeomorfizmem klasy C^r, $1 \le r \le \infty$, przestrzeni euklidesowej na siebie, że $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Wykazać, że istnieje takie przekształcenie $h\colon \mathbb{R}^n \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, klasy C^r, że dla każdego $t \in [0,1]$ przekształcenie $\mathbf{x} \mapsto \mathrm{h}(\mathbf{x}, \mathrm{t})$ jest dyfeomorfizmem, $h(\mathbf{x}, 0) = \mathrm{f}(\mathbf{x})$, $h(x, 1) = Df(\mathbf{0})\mathbf{x}$.

Uwaga. Jeżeli $\det(Df(\mathbf{0})) > 0$, to zamiast $h(x,1) = Df(\mathbf{0})\mathbf{x}$ można napisać $h(x,1) = \mathbf{x}$ — nie jest trudne, mogą Panowie to wykazać, a w każdym razie mogą po zastanowieniu się nad tym.

Pytanie: czy jeśli istnieje takie $r > 0$, że $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ gdy $\|\mathbf{x}\| \geq \mathrm{r}$ (poza pewną kulą dyfeomorfizm f jest identycznością), to czy można zażądać, by $\|h(\mathbf{x}, \mathrm{t})\| = \mathbf{x}$ dla każdego $t \in [0,1]$ i każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, dla którego $\|\mathbf{x}\| \geq \varrho$, gdzie ϱ jest dostatecznie dużą liczbą dodatnią.

Zadanie 9. Udowodnić, że dwa dyfeomorfizmy są gładko sprzężone (sprzężenie jest dyfeomorfizmem), to ich różniczki w odpowiednich punktach okresowych są liniowo sprzężone.

Zadanie 10. Opisać dyfeomorfizm $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy C^∞, który nie jest lokalnie topologicznie sprzężony z żadnym liniowym izomorfizmem.

Zadanie 11. Niech $f_A(\mathbf{x}) = \mathrm{A}\mathbf{x}$ dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ i każdej macierzy A wymiaru 2×2. Które z przekształceń f_A są topologicznie sprzężone:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, (g) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, (h) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.