Kilka zadań z Układów Dynamicznych

13 listopada 2014

Druga seria

Zadanie 1. Opisać wszystkie homeomorfizmy okręgu, $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ zachowujące orientację, o następującej własności: istnieje takie $\alpha > 0$, że istnieją łuki o długości α i jeśli łuk I na długość α, to łuk $f(I)$ ma długość mniejszą bądź równą α.

Zadanie 2. Niech x_n będzie ciągiem liczb rzeczywistych o następującej własności:

$$x_{n+m} \leq x_n + x_m.$$

Wykazać, że ciąg $\frac{x_n}{n}$ jest zbieżny do swojego kresu dolnego (być może równego $-\infty$).

Zadanie 3. Wykazać, że liczbę obrotu homeomorfizmu $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ zachowującego orientację można równoważnie zdefiniować, nie używając podniesienia f, w następujący sposób. Dla każdego $x \in \mathbb{S}^1$ oznaczamy przez $d(x)$ długość dodatnio zorientowanego łuku, którego początkiem jest punkt x, a końcem — punkt $f(x)$. Następnie określamy ciąg

$$d_n(x) = d(x) + d(f(x)) + \ldots d(f^{n-1}(x)).$$

Wykazać, że

$$d_n(x) + d_m(x) - 1 \leq d_{n+m}(x) \leq d_n(x) + d_m(x) + 1$$

i że, w takim razie, ciąg $\frac{d_n(x)}{n}$ ma granicę $\rho(x)$.
Wykazać że $\rho(x)$ jest równe liczbie obrotu f (i, w takim razie, nie zależy od x).

Zadanie 4. Podczas referatu wykazaliśmy że jeśli f jest homeomorfizmem okręgu zachowującym orientację, o niewymiernej liczbie obrotu, to zbiór punktów ω-granicznych (czyli zbiór punktów skupienia trajektorii w przód) punktu $x \in \mathbb{S}^1$ nie zależy od wyboru punktu x, i albo jest (1) całym okręgiem, albo (2) doskonałym, domkniętym i nigdziegęstym podzbiorem okręgu. Oznaczmy ten zbiór $\Omega(f)$.

Wykazać że w przypadku (1) homeomorfizm f jest topologicznie sprzężony z obrotem R_ρ o kąt $2\pi\rho$, gdzie ρ jest liczbą obrotu f.
Komentarz: Homeomorfizm h sprzęgający musi spełniac $h \circ f^n(x) = R_{n\rho} \circ h(x)$. Ustalenie wartości $h(x)$ wyznacza więc h na całej orbicie x, która jest gęsta w $\mathbb{S}^1$. Pozostaje sprawdzić, czy h, zdefiniowane na orbicie, przedłuża się do homeomorfizmu $\mathbb{S}^1$.

Być może wygodniej jest tu patrzeć na podniesienie F, i skorzystać z udowodnionego podczas seminarium lematu: $F^{n_1}x + m_1 > F^{n_2}x + m_2 \iff n_1\rho + m_1 > n_2\rho + m_2$. Oznacza to że przekształcenie, które punktowi $F^n x + m$ $(n, m \in \mathbb{Z})$ przyporządkowuje punkt $n\rho + m$, jest ściśle monotoniczne. Można je przedłużyć jednoznacznie do ściśle monotonicznego i okresowego przekształcenia $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które...

Zadanie 5. Ciąg dalszy. Wykazać że w przypadku (2) ta sama konstrukcja prowadzi do przekształcenia $h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, ciągłego, i spełniającego $h \circ f^n(x) = R_{n\rho} \circ h(x)$. Ale tym razem h nie jest homeomorfizmem.

Zadanie 6. Dowieść, że jeśli orbita punktu jest zwarta, to jest skończona.

Zadanie 7. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie takim przekształceniem klasy C^∞, że $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$. Dowieść, że najmniejsza taka liczba naturalna $n > 1$, że $(f \circ f)^{(n)} \neq 0$ jest nieparzysta.