Kilka zadań z Układów Dynamicznych

20 października 2014

Pierwsza seria

Zadanie 1. Przekształcenie $h\colon [0,1] \to [0,1]$ jest homeomorfizmem. Czy wynika stąd, że jeśli jednowymiarowa miara Lebesgue'a zbioru $A \subseteq [0,1]$ jest zerem, to również miara Lebesgue'a zbioru $h(A)$ jest zerem?

Zadanie 2. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie określone wzorem $f(x) = x + \frac{1}{2}\sin x$, a przekształcenie $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ — wzorem $g(x) = x + \frac{1}{2}\cos x$. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki homeomorfizm $h\colon \mathbb{R} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$, że $h(f(x)) = g(h(x))$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie określone wzorem $f(x) = x + x^3$, a przekształcenie $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ — wzorem $g(x) = x + \frac{x^2}{1+x^2}$. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki homeomorfizm $h\colon \mathbb{R} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$, że $h(f(x)) = g(h(x))$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie określone wzorem $f(x) = -x - x^3$, a przekształcenie $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ — wzorem $g(x) = -x + x^3$. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki homeomorfizm $h\colon \mathbb{R} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$, że $h(f(x)) = g(h(x))$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 5. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie określone wzorem $f(x) = x + \frac{1}{2}\sin x$, a przekształcenie $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ — wzorem $g(x) = x + \frac{1}{2}\cos^2 x$. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki homeomorfizm $h\colon \mathbb{R} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$, że $h(f(x)) = g(h(x))$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 6. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ będzie określone wzorem $f(x,y) = (\frac{1}{2}x+y, \frac{1}{2}y)$, a przekształcenie $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ — wzorem $g(x,y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki homeomorfizm $h\colon \mathbb{R}^2 \xrightarrow{na} \mathbb{R}^2$, że $h(f(x,y)) = g(h(x,y))$ dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Zadanie 7. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ będzie określone wzorem $f(x,y) = (\frac{1}{2}x + y, -\frac{1}{2}y)$, a przekształcenie $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ — wzorem $g(x,y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki homeomorfizm $h\colon \mathbb{R}^2 \xrightarrow{na} \mathbb{R}^2$, że $h(f(x,y)) = g(h(x,y))$ dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Zadanie 8. Które pary poniższych przekształceń $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są topologicznie sprzężone?

a. $f(x) = x/2$, b. $f(x) = 2x$, c. $f(x) = -2x$,

d. $f(x) = 5x$, e. $f(x) = x^3$.

Zadanie 9. Wypisac wzorem sprzężenie topologiczne $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pomiędzy przekształceniem $f(x) = ax^2 - 1$ oraz przekształceniem $g(x) = x^2 - c$ (dla pewnego c zależnego od a).

Zadanie 10. Rozważmy homeomorfizmy $f, g\colon [0;1] \to [0;1]$ takie że $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = g(1) = 1$, i f, g nie mają innych punktów stałych. Wykazać że f i g są topologicznie sprzężone. *Wskazówka:* można założyc (dlaczego?) że $f(x) > x, g(x) > x$ dla $x \in (0,1)$. Wybierzmy punkt $x_0 \in (0,1)$ i odcinki $I_f = [x_0, f(x_0)]$, $I_g = [x_0, g(x_0)]$. Przekształćmy I_f na I_g jakimś rosnącym homeomorfizmem h. Jak rozszerzyć h na cały odcinek $[0,1]$, aby otrzymać żądane sprzężenie?

Zadanie 11. Rozpatrzmy rodzinę przekształceń kwadratowych $f_a\colon [0,1] \to [0,1]$ $(a \in (0,4)$:

$$f_a(x) = ax(1-x).$$

Wykazać że dla dowolnych $a_1, a_2 \in (1,2)$ przekształcenia f_{a_1} oraz f_{a_2} są topologicznie sprzężone.
Wykazać że przekształcenia f_3 i f_4 nie są topologicznie sprzężone.
Rozstrzygnąć, czy przekształcenia f_2 i f_3 są topologicznie sprzężone.

Zadanie 12. Pokazać, że jeśli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągłe i każdy punkt jest okresowy, to f^2 jest identycznością.

Zadanie 13. Pokazać, że jeśli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1 i prawie każdy punkt (względem miary Lebesgue'a) jest okresowy, to f^2 jest identycznością.

Zadanie 14. Rozpatrzmy przekształcenie którego wykres jest ńamiotem": $F\colon [0,1] \to [0,1]$,

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla} \quad x \in (0, \frac{1}{2}] \\ 2-2x & \text{dla} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Wykazać, że punkt x jest preokresowy wtedy i tylko wtedy gdy $x \in \mathbb{Q}$.
Wykazać, że x jest okresowy wtedy i tylko wtedy gdy x jest postaci $\frac{2k}{p}$, gdzie k jest liczbą naturalną, a p jest liczbą naturalną nieparzystą.

Zadanie 15. Podać przykład dwóch takich przekształceń f, g, pze f^2 jest sprzęzone z g^2, a f nie jest sprzężone z g.

Zadanie 16. Które z poniższych przekształcen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są topologicznie sprzężone?
W których przypadkach sprzężenie jest hölderowskie, a w których różniczkowalne?

a. $f(x) = x/2$, b. $f(x) = 2x$, c. $f(x) = -2x$,
d. $f(x) = 5x$, e. $f(x) = x^3$.

Zadanie 17. Wypisać wzorem sprzężenie topologiczne przekształceń $f(x) = ax^2 - 1$ oraz $g(x) = x^2 - c$.

Zadanie 18. Które z poniższych przekształcen są topologicznie sprzężone w pewnym otoczeniu 0? Które sprzężenia są hölderowskie, a w które różniczkowalne?

a. $f(x) = \mathrm{tg}(x)$, b. $f(x) = \sqrt{2}\,x$, c. $f(x) = \sin(x)$,
d. $f(x) = -2x$, e. $f(x) = \pi x$.

Zadanie 19. Rozważmy takie homeomorfizmy $f, g\colon [0;1] \to [0;1]$, że $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = g(1) = 1$ oraz $f(x) \neq x \neq g(x)$, gdy $0 < x < 1$.
Wykazać, że f i g są topologicznie sprzężone.

Zadanie 20. Rozpatrzmy rodzinę przekształłceń kwadratowych $f_a\colon [0,1] \to [0,1]$ ($a \in (0,4)$:

$$f_a(x) = ax(1-x)\,.$$

Wykazać, że dla dowolnych $a_1, a_2 \in (1,2)$ przekształcenia F_{a_1} oraz f_{a_2} są topologicznie sprzężone.
Wykazać, że przekształcenia f_3 i f_4 nie są topologicznie sprzężone.

Zadanie 21. Niech f, g będą takimi przekształceniami klasy C^1 określonymi w otoczeniu 0 w $\mathbb{R}$, że $f(0) = g(0) = 0$, $0 < f'(0) < 1$, $0 < g'(0) < 1$.
Wykazać, że f i g są sprzężone topologicznie w pewnym otoczeniu 0.
Ponadto wykazać, że można zbudować sprzężenie bilipschitzowskie wtedy i tylko wtedy gdy $f'(0) = g'(0)$.

Zadanie 22. Niech $0 < c < 1$. Rozważmy przekształcenie f_c określone jako $f_c(x) = \frac{x}{c}$ dla $x \in [0,c]$ i $f_c(x) = \frac{x}{c-1} - \frac{1}{c-1}$ dla $x \in [c,1]$.
Pokazać, że wszystkie przekształcenia f_c są topologicznie sprzężone.
Czy istnieje sprzężenie gladkie? Lipschitzowskie? Hölderowskie?