Proseminarium

Uklady Dynamiczne

rok. akad. 2013/14

Referaty

1. Homeomorfizmy okręgu zachowujące orientację, o niewymiernej liczbie obrotu. Istnienie półsprzężenia topologicznego z obrotem. Twierdzenie Denjoy — o tym, że odpowiednio gładki dyfeomorfizm okręgu o niewymiernej liczbie obrotu jest sprzężony topologicznie z obrotem.

Literatura. Półsprzężenie będzie właściwie konsekwencją wcześniejszych zadań. Krótko zapisany dowód twierdzenia Denjoy można znaleźć w [KH], rozdz 12.1. Warto omówić też *kontrprzyklad Denjoy* — rozdz 12.2 tej książki.

Dowód bardziej nawiązujący do kombinatoryki obrotu na okręgu — [dMvS], rozdzial I.2.

Ponadto — [PY]... itd. — prawie w każdym podręczniku Układów Dynamicznych.

2. Ulamki łańcuchowe. Nieco o aproksymacji diofantycznej. Związek z obrotem na okręgu, to znaczy — związek rozwinięcia liczby α w ułamek łańcuchowy z obrotem na okręgu o kąt $2\pi\alpha$. Przekształcenie Gaussa — czyli przekształcenie kawałkami monotoniczne (z nieskończoną liczbą kawałków), odpowiadające przesunięciu w rozwinięciu w ułamek lańcuchowy. Miara niezmiennicza bezwzględnie ciągła względem miary Lebesgue'a — wzór. Co z istnienia i własności tej miary można wywnioskować o rozwinięciu w ułamek łańcuchowy dla typowej liczby z przedziału $(0, 1)$?

Literatura Dla wyliczenia miary niezmienniczej — [SKF], rodzial 7.4 (bez ogólnego twierdzenia o istnieniu absolutnie ciągłej miary niezmienniczej. O aproksymacji diofantycznej

3. Algebraiczne automorfizmy torusa $\mathbb{T}^2$. Charakteryzacja punktów okresowych. Foliacja stabilna i niestabilna. Liczba punktów o okresie n- asymptotyka. Wprowadzenie pojec *topologiczna tranzytywnosc* i *topologiczne mieszanie*. Sprawdzenie tych wlasnosci dla automorfizmów torusa.

Literatura

Dobre zródla to [PY], rozdzial 5 i [KH], rozdzialy 2.5 i 2.6.

4. Algebraiczne automorfizmy torusa $\mathbb{T}^2$. Wprowadzenie pojecia *strukturalna stabilnosc.* Strukturalna stabilnosc automorfizmów hiperbolicznych torusa $\mathbb{T}^2$. Wprowadzenie pojęcia rozbicia Markowa i dynamiki symbolicznej. Wyznaczenie rozbicia Markowa dla automorfizmu hiperbolicznego torusa $\mathbb{T}^2$.

Literatura jak wyzej: Dobre zródla to [PY], rozdział 5 i [KH], rozdzialy 2.5 i 2.6.

5. Porządek Szarkowskiego. A. N. Szarkowski odkrył pewne dynamiczne własności przekształceń ciągłych odcinka w siebie. Pracy nie niezauważono przez czas dłuższy, bo została opublikowana w 1964 r. w ukraińskim czasopiśmie po rosyjsku. W 1977 r. P. Štefan przedstawił jej rezultaty w artykule opublikowanym w Communications of Mathematical Physics dodając coś od siebie. Najważniejszy wynik z tej pracy to twierdzenie, które mówi, że jeśli funkcja ma punkt okresowy o pewnym okresie, to ma punkty o wszystkich okresach późniejszych w porządku Szarkowskiego, w szczególności obecność punktu okresowego wymusza istnienie punktów o wszystkich możliwych okresach. Zręczny dowód tego twierdzenia powstał w czasie rozmów podczas konferencji z układów dynamicznych w Northwestern University w 1979 [BGMY]. Oczywiście w późniejszych publikacjach różni autorzy redagują go po swojemu, ale te zmiany wg. MK nie wnoszą zbyt wiele.

6. Zbiór Julii dla przekształcenia $\exp(z)$, praca Misiurewicza. W 1979 r. M. Misiurewicz przebywając w IHES (we Francji) usłyszał o problemie postawionym przez Fatou w pracy z 1926 r. Problem ten rozwiązał nie stosując żadnych „uczonych” metod, wszystkie twierdzenia powinien znać student, który zdał Funkcje analityczne (kiedyś to było na drugim roku studiów). Praca zawiera pomysłowy lemat, po sformułowaniu którego rozumowanie jest już jasne, choć chwilę popracować trzeba [MM].

7. Zjawiska geometryczne- nieco o wymiarze. Wymiar Hausdorffa zbioru Julii dla przekształceń z rodziny $\lambda \exp(z)$. Na seminarium z układów dynamicznych w Boston University w 1982 zreforowano pracę Misiurewicza [MM]. Zainteresowano się punktami okresowymi funkcji $z \mapsto e^z$ — po seminarium, zwykle rozmawiano jeszcze o matematyce bez sztywnego ograniczenia czasowego, co nie jest możliwe u nas ze względu na porę. Doprowadziło to opisu dynamiki za pomocą ciągów liczb calkowitych i przesunięcia na nich. Niejasne pozostało, jaka jest miara zbioru tych z, których cała trajektoria w przód jest zawarta w pasie $0 < \mathrm{Im} z < \pi$. R. Devaney spotkał na konferencji późniejszego laureata medalu Fieldsa, C. McMullena, który zainteresował się problemem i następnego ranka miał rozwiązanie zresztą znacznie wykraczające poza zadane pytanie [CMCM] Później odkryto jeszcze wiele interesujących własności dynamicznych funkcji wykładniczych.

Literatura

[Sz] Wieslaw Szlenk, Wstep do teorii gladkich ukladów dynamicznych, PWN, Biblioteka Matematyczna, tom 56

[dMvS] W.de Melo, S.van Strien Óne dimensional Dynamics", Springer, 1993

[SKF] Sinaj, Kornfeld, Fomin, Teoria ergodyczna (jest polskie tlumaczenie)

[KH] A.Katok, B. Hasselblatt, Introduction to the modern theory of dynamical systems, Cambridge University Press, 1995

[PY] Mark Pollicott, M. Yuri, Dynamical systems and ergodic theory, London Math. Soc. Student Texts, 40

[BGMY] L. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz, L. S. Young, Periodic Points and Topological Entropy of One Dimensional Maps, in "Global Theory of Dynamical Systems", (Lecture Notes in Math. 819), Springer, Berlin 1980, pp. 18–34

[CMCM] Curt Mc Mullen, Area and Hausdorff Dimension of Julia Sets of Entire Functions, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 300, No 1, 1987, pp 329 – 342

[MM] M. Misiurewicz, On iterates of e^z, Ergodic theory and dynamical systems (1981) 1, pp 103 – 106

[DK] R.L. Devaney, M. Krych, Dynamics of Exp(z), Ergodic theory and dynamical systems (1984) 4, pp 35 – 52

Kilka ciekawych i nietrudnych książek, do których warto zajrzeć:

[RD1] Robert Devaney A FIRST COURSE IN CHAOTIC DYNAMICAL SYSTEMS.

[HK] Boris Hasselblatt, Anatole KAtok: A first course in dynamics

[CR1] Clark Robinson Introduction to Dynamical Systems: Discrete and Continuous (Pure and Applied Undergraduate Texts, American MAthematical Society)

[RD2] Robert Devaney AN INTRODUCTION TO CHAOTIC DYNAMICAL SYSTEMS.

[CR2] Clark Robinson Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos (Studies in Advanced Mathematics)