

Układy dynamiczne

proseminarium
dla studentów III roku matematyki

Michał Krych i Anna Zdunik

rok akad. 2014/15

Układy dynamiczne

Układy dynamiczne

Układy dynamiczne, i związana z nimi Teoria ergodyczna zajmują się badaniem stochastycznych własności układów deterministycznych.

Układy dynamiczne

Układy dynamiczne, i związana z nimi Teoria ergodyczna zajmują się badaniem stochastycznych własności układów deterministycznych. np. przekształcenia mierzalnego

$$f : X \rightarrow X,$$

gdzie (X, \mathfrak{M}, μ) jest przestrzenią ze skończoną miarą μ taką, że

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A) \quad \text{dla } A \in \mathfrak{M}.$$

Układy dynamiczne

Układy dynamiczne, i związana z nimi Teoria ergodyczna zajmują się badaniem stochastycznych własności układów deterministycznych. np. przekształcenia mierzalnego

$$f : X \rightarrow X,$$

gdzie (X, \mathfrak{M}, μ) jest przestrzenią ze skończoną miarą μ taką, że

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A) \quad \text{dla } A \in \mathfrak{M}.$$

Interesują nas stochastyczne własności iteracji

$$f^n(x) = f \circ \dots \circ f(x) \quad \text{punktów } x \in X.$$

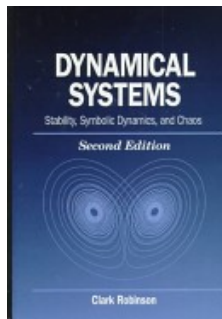
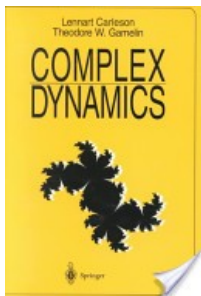
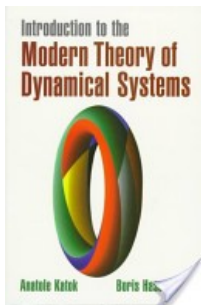
.. albo zachowanie graniczne trajektorii równania różniczkowego $\dot{x} = f(t, x)$ na rozmaitości,, albo w \mathbb{R}^n .

..albo topologiczne i geometryczne własności zbiorów granicznych i zbiorów niezmienniczych

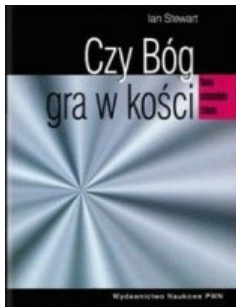
..albo typowe własności w rodzinach przekształceń/równań różniczkowych, i zagadnienie stabilności- co sie stanie z trajektoriami jeśli trochę zmienimy równanie, lub jeśli trochę zmienimy warunek początkowy

Układy dynamiczne to szybko rozwijająca się, bardzo ważna dziedzina matematyki

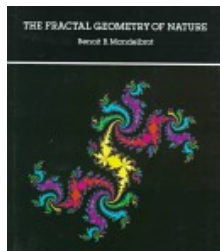
Układy dynamiczne, oprócz własnych wypracowanych teorii, używają metod Analizy Funkcjonalnej, Geometrii Różniczkowej, Funkcji Analitycznych, **Rachunku Prawdopodobieństwa**....



..czasem zwana popularnie matematyczną teorią chaosu



Ian Stewart: "Czy Bóg gra w kości?
Nowa matematyka chaosu"



Benoit Mandelbrot "The fractal
geometry of Nature"

Historia

Historia

- L. Boltzmann (1844–1906): fizyka statystyczna



Historia

- L. Boltzmann (1844–1906): fizyka statystyczna
- H. Poincaré (1854–1912): mechanika nieba
- G. Birkhoff (1884–1944): twierdzenia ergodyczne
- A. Kołmogorow (1903–1987): entropia



Układy dynamiczne w Warszawie

Karol Krzyżewski, Wiesław Szlenk- założyciele Warszawskiej Grupy Układów Dynamicznych.

Grupa polskich matematyków

pracujących w dziedzinie Układów Dynamicznych w Polsce i za granicą (Francja, USA, Kanada...) jest tak liczna ze nie zmieści się w tym slajdzie. Ale musimy tu wspomnieć że..

Medal Sierpińskiego za rok 2014 otrzymał nasz Kolega [profesor Maciej Wojtkowski](#). Wygłoszony przez niego wykład im. Sierpińskiego miał tytuł: "Rola krzywizny w dynamice"

Układy Dynamiczne przyciągają znakomitych matematyków

- S. Smale (medal Fieldsa 1966)
- J-Ch Yoccoz (medal Fieldsa 1994)
- C. McMullen (medal Fieldsa 1998)
- H. Furstenberg (nagroda Wolfa 2006)
- E. Lindenstrauss (medal Fieldsa 2010)
- T. Tao (medal Fieldsa 2006)
- S. Smirnov (medal Fieldsa 2010)
- Y. Sinaj (nagroda Abela 2014)
- J. Milnor (nagroda Abela 2011, medal Fieldsa 1962, nagroda Wolfa 1989)

CO TRZEBA UMIEĆ NA POCZĄTEK

Tutaj- dobra wiadomość!

Nie zakładamy żadnej specjalnej wiedzy; w zupełności wystarczy przygotowanie w zakresie pierwszych dwóch lat studiów.

Sporo czasu poświęcimy dynamice jednowymiarowej- to znaczy przekształceniom okręgu, odcinka..

Będzie też o modelach układów dynamicznych w zastosowaniach, m.in w naukach przyrodniczych.

ZAPRASZAMY

Tematyka seminarium

będzie dostosowana do oczekiwań uczestników, i podzielona między wątki bardziej teoretyczne i bardziej "stosowane". Wszystkie będą ciekawe. Ci z Państwa którzy będą chcieli zająć się poważniej ambitniejszym tematem- też dostaną taką możliwość.

Przygotujemy też rosnący zbiór zadań, i będziemy Państwa nimi nieco zajmowali . Mamy nadzieje że przy Państwa pomocy ten zbiór wzbogaci się o nowe pytania i nowe rozwiązania.

Warunkiem zaliczenia jest systematyczne uczestnictwo w proseminarium, rzetelne przygotowanie referatu (referatów) oraz napisanie pracy licencjackiej.

Zagadka na zachęte

1, 2, 4,
8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096,
8192, 16384, 32768, 65536, 131072,
262144, 524288, 1048576, 2097152, 4194304,
8388608, 16777216, 33554432, 67108864,
134217728, 268435456, 536870912,
1073741824, 2147483648, 4294967296,
8589934592, 17179869184, 34359738368,
68719476736, 137438953472, 274877906944,
549755813888, 1099511627776,

Na poprzedniej stronie..

wypisane są kolejne liczby postaci 2^n , tyle ile się zmieściło.

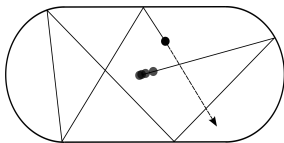
Pytanie

Określamy ciąg $a_n =$ pierwsza cyfra w rozwinięciu dziesiętnym 2^n .
Czy w tym ciągu wystąpi cyfra 7? A jeśli tak, to która cyfra będzie pojawiać się częściej? 7 czy 8?

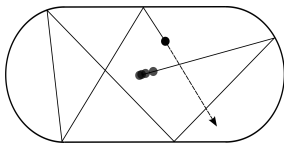
A oto inny układ dynamiczny- bilard

A oto inny układ dynamiczny- bilard

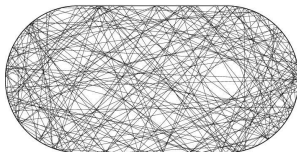


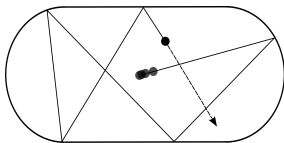


Matematycznie, bilard to układ zachowujący miarę na przestrzeni fazowej położenia \times kąty.

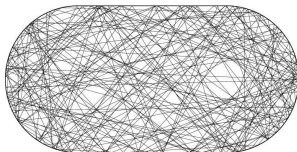


Matematycznie, bilard to układ zachowujący miarę na przestrzeni fazowej położenia \times kąty.



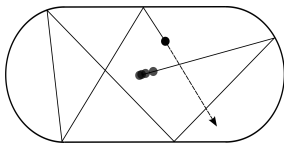


Matematycznie, bilard to układ zachowujący miarę na przestrzeni fazowej położenia \times kąty.

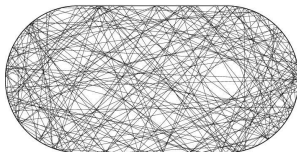


Jeszcze jedna zagadka- tym razem dużo trudniejsza:

Czy każdy bilard w wielokącie ma orbitę zamkniętą (okresową)?



Matematycznie, bilard to układ zachowujący miarę na przestrzeni fazowej położenia \times kąty.



Jeszcze jedna zagadka- tym razem dużo trudniejsza:

Czy każdy bilard w wielokącie ma orbitę zamkniętą (okresową)?
Jest to otwarty problem, nie rozwiązany nawet dla trójkątów!