Szybkość zbieżności

Niech $f(x) = x = ax^k + o(x^k)$, $a > 0$, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$. Dla dostatecznie małych $x > 0$ mamy $0 < f(x) < x$. Niech x_0 oznacza dostatecznie małą liczbę dodatnią i niech $x_{n+1} = f(x_n)$. Z poprzedniego zdania wynika, że ciąg a_n jest ściśle malejący, ma dodatnie wyrazy, więc ma granicę $g \in [0, x_0)$. Oczywiście $g = f(g)$, więc $g = 0$. Szukamy takiego wykładnika $\alpha > 0$, że $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha x_n \in (0, \infty)$. Jest to równoważne stwierdzeniu $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n^\beta \in (0, \infty)$, gdzie $\beta = \frac{1}{\alpha}$, co można też zapisać tak: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^{-\beta}}{n} \in (0, \infty)$. Z twierdzenia Stolza wynika, że jeśli istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^{-\beta} - x_n^{-\beta}}{n+1-n}$, to istnieje też granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^{-\beta}}{n}$ i obie te granice są równe. Wystarczy więc znaleźć taką liczbę $\beta > 0$, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_{n+1}^{-\beta} - x_n^{-\beta} \right) \in (0, \infty).$$

Mamy

$$x_{n+1}^{-\beta} - x_n^{-\beta} = x_{n+1}^{-\beta} \cdot x_n^{-\beta} \left(x_n^\beta - x_{n+1}^\beta \right) = f(x_n)^{-\beta} \cdot x_n^{-\beta} \left(x_n^\beta - f(x_n)^\beta \right) =$$
$$= (x_n - a x_n^k + o(x_n^k))^{-\beta} \cdot x_n^{-\beta} \left(x_n^\beta - (x_n - a x_n^k + o(x_n^k))^\beta \right) =$$
$$= (1 - a x_n^{k-1} + o(x_n^{k-1}))^{-\beta} \cdot x_n^{-\beta} \left(1 - (1 - a x_n^{k-1} + o(x_n^{k-1}))^\beta \right) =$$
$$= (1 - a x_n^{k-1} + o(x_n^{k-1}))^{-\beta} \cdot x_n^{-\beta} \left(\beta a x_n^{k-1} + o(x_n^{k-1}) \right) =$$
$$= (1 - a x_n^{k-1} + o(x_n^{k-1}))^{-\beta} \cdot x_n^{-\beta+k-1} (\beta a + o(1)).$$

Wynika stąd, że interesująca nas granica jest równa 0 dla $\beta < k - 1$, $+\infty$ — dla $\beta > k - 1$ a dla $\beta = k - 1$ jest równa $(k - 1)a$.

Stąd wynika, że poszukiwaną liczbą α jest $\frac{1}{k-1}$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} x_n \sqrt[k-1]{n} = \sqrt[k-1]{a(k-1)} \,.$$