Kilka zadań z AMII

Tekst poprawiony 14 sierpnia po skrytykowaniu poprzedniej wersji przez dwie rozsądne panie. Oby takich było więcej ... — i nie tylko pań.

Zadanie 1.1 Wykazać, że jednorodna kula przyciąga punktową masę m z taką samą siłą z jaką przyciąga ją punkt materialny umieszczony w środku kuli, w którym skupiona jest masa równa masie kuli.
Rozwiązanie
Załóżmy, że gęstość masy kuli jest równa 1, czyli że masa dowolnej jej części równa jest jej objętości (trójwymiarowej mierze Lebesgue'a). Można przyjąć, że środkiem kuli jest punkt $\mathbf{0} = (0,0,0)$ oraz że masa m znajduje się w punkcie $(a,0,0)$, gdzie $a > r$, a $r > 0$ oznacza promień kuli. Siła przyciągania równa jest w tej sytuacji

$$G \cdot \int_{x^2+y^2+z^2 \leq r2} \frac{a-x}{((a-x)^2+y^2+z^2)^{3/2}} \mathrm{d}\ell_3 \,,$$

gdzie G oznacza stałą grawitacyjną: masa m przyciąga masę M z siłą $G \cdot \frac{m \cdot M}{d^2}$, gdzie d jest odległością masy m od masy M. Scałkujemy korzystając z twierdzenia Fubiniego i twierdzenia o zamianie zmiennych. Niech $\varrho \in \big(0, \sqrt{r^2-x^2}\,\big)$, $\theta \in (-\pi, \pi)$, $y = \varrho\cos\theta$, $z = \varrho\sin\theta$. Mamy wtedy
$\int_{x^2+y^2+z^2 \leq r2} \frac{a-x}{((a-x)^2+y^2+z^2)^{3/2}} \mathrm{d}\ell_3 = \int_{-r}^{r} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(a-x)\varrho \mathrm{d}\varrho \mathrm{d}\theta}{((a-x)^2+\varrho^2)^{3/2}} =$
$= 2\pi \int_{-r}^{r} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} (a-x)\varrho\big((a-x)^2+\varrho^2\big)^{-3/2} \mathrm{d}\varrho =$
$= -2\pi \int_{-r}^{r} (a-x)\big((a-x)^2+r^2-x^2\big)^{-1/2} \mathrm{d}x + 2\pi \int_{-r}^{r} (a-x)\big((a-x)^2+0^2\big)^{-1/2} \mathrm{d}x =$
$= -2\pi \int_{-r}^{r} (a-x)\big(a^2+r^2-2ax\big)^{-1/2} \mathrm{d}x + 2\pi \int_{-r}^{r} \mathrm{d}x \overset{\text{przez}}{\underset{\text{części}}{=\!=}}$
$= \frac{2\pi}{a}(a-x)(a^2+r^2-2ax)^{1/2}\Big|_{-r}^{r} + \frac{2\pi}{a}\int_{-r}^{r} (a^2+r^2-2ax)^{1/2} + 4\pi r =$
$= \frac{2\pi}{a}\big((a-r)^2-(a+r)^2\big) - \frac{2\pi}{3a^2}(a^2+r^2-2ax)^{3/2}\Big|_{-r}^{r} + 4\pi r =$
$= -8\pi r - \frac{2\pi}{3a^2}\big((a-r)^3-(a+r)^3\big) + 4\pi r = -4\pi r - \frac{2\pi}{3a^2}\big(-6a^2r-2r^3\big) =$
$= \frac{4\pi r^3}{3a^2} = \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \frac{1}{a^2}.$
Otrzymaliśmy dokładnie taki wynik, jakiego oczekiwać należało zgodnie z tezą dowodzonego twierdzenia.

Zadanie 1.2 Definiujemy zbiór
$A = \big\{(x,y,z): \quad z \geqslant 0,\ |x|\sqrt{6}+y\sqrt{2}+z \leqslant 2\sqrt{2},\ 2y\sqrt{2}-z \geqslant -2\sqrt{2},\ 2y+\sqrt{2}z \leqslant 1\,\big\}.$
Znaleźć środek ciężkości zbioru A (względem miary Lebesgue'a).
Rozwiązanie
Poziomice funkcji postaci $ax+by+cz+d$ są płaszczyznami, jeśli spełniona jest nierówność $[a,b,c] \neq [0,0,0]$. Nierówność postaci $ax+by+cz+d \leqslant 0$ opisuje więc półprzestrzeń, jedną z dwu wyznaczonych przez płaszczyznę $ax+by+cz+d=0$, gradient wskazuje którą: w wypadku tej nierówności jest półprzestrzeń, do której styczny jest wektor $-[a,b,c]$. Wobec zbiór A jest częścią wspólną pięciu półprzestrzeni. Jest więc zbiorem wypukłym, jeśli jest ograniczony, to jest wielościanem, który ma pięć ścian. Punkt $\mathbf{0} = (0,0,0)$ jest jego elementem, o czym przekonać się można podstawiając $x = y = z = 0$ do wszystkich pięciu nierówności. Zajmiemy się najpierw zbiorem

$A_4 = \big\{(x,y,z): \quad z \geqslant 0,\ \ |x|\sqrt{6}+y\sqrt{2}+z \leqslant 2\sqrt{2},\ \ 2y\sqrt{2}-z \geqslant -2\sqrt{2}\,\big\}$. Rozwiążemy teraz cztery układy równań:

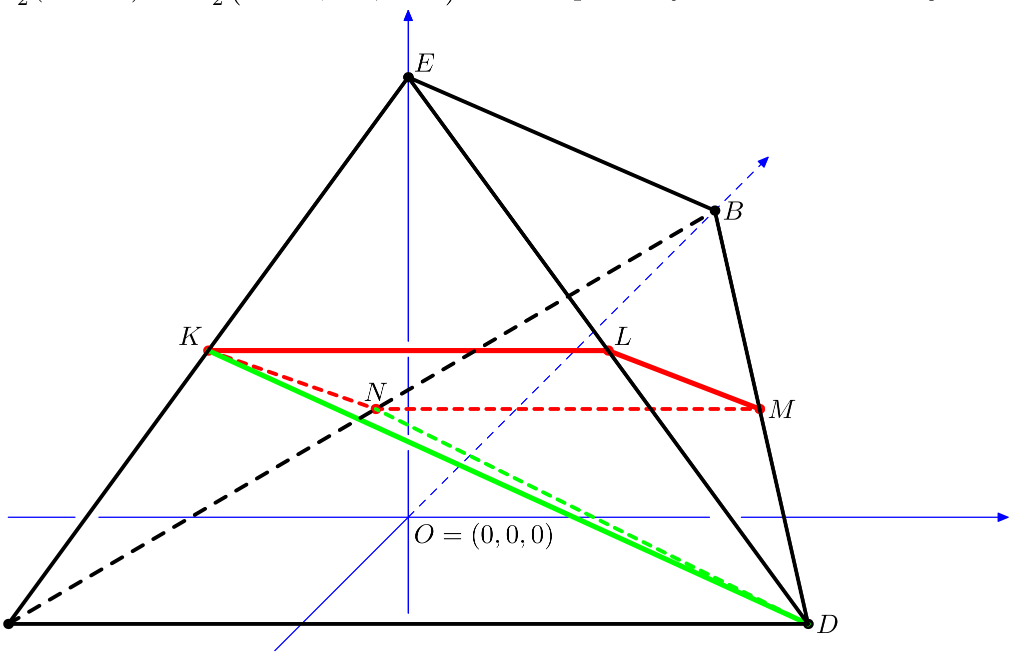
$$\begin{cases} z=0,\\ x\sqrt{6}+y\sqrt{2}+z=2\sqrt{2},\\ -x\sqrt{6}+y\sqrt{2}+z=2\sqrt{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} z=0,\\ x\sqrt{6}+y\sqrt{2}+z=2\sqrt{2},\\ 2y\sqrt{2}-z=-2\sqrt{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=0,\\ -x\sqrt{6}+y\sqrt{2}+z=2\sqrt{2},\\ 2y\sqrt{2}-z=-2\sqrt{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x\sqrt{6}+y\sqrt{2}+z=2\sqrt{2},\\ -x\sqrt{6}+y\sqrt{2}+z=2\sqrt{2},\\ 2y\sqrt{2}-z=-2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Rozwiązaniami kolejnych układów równań są punkty :

$$B=(0,2,0),\qquad D=(\sqrt{3},-1,0),\qquad C=(-\sqrt{3},-1,0),\qquad E=(0,0,2\sqrt{2}\,).$$

Odległość każdych dwóch z nich jest równa $2\sqrt{3}$, więc są to wierzchołki czworościanu foremnego o krawędzi $2\sqrt{3}$. Ponieważ każdy z tych punktów jest elementem zbioru A_4, więc A_4 jest czworościanem foremnym o wierzchołkach B, C, D, E. Widać natychmiast, że $B, E \notin A$ oraz $C, D \in A$. Nietrudno sprawdzić, że punkty $N = \frac{1}{2}(B+C) = \frac{1}{2}\big(\sqrt{3},1,0\big)$ i $M = \frac{1}{2}(B+D) = \frac{1}{2}\big(-\sqrt{3},1,0\big)$ oraz $K = \frac{1}{2}(E+C) = \frac{1}{2}\big(\sqrt{3},-1,2\sqrt{2}\big)$ i $L = \frac{1}{2}(E+D) = \frac{1}{2}\big(-\sqrt{3},-1,2\sqrt{2}\big)$ leżą na płaszczyźnie o równaniu $2y+\sqrt{2}z=1$.



Wobec tego A to pięciościan o wierzchołkach K, L, M, N, C, D. Można zauważyć, że jest on sumą dwóch ostrosłupów: trójkątnego o wierzchołkach C, D, N, K i czworokątnego o wierzchołkach K, L, M, N, D. Pięciościany $KLMNCD$ i $KLMNBE$ są przystające, bo są symetryczne względem prostej MK.

Niech $2V$ oznacza objętość czworościanu $BCDE$. Wtedy objętość A jest równa V, bo to połowa objętości czworościanu $BCDE$. Natomiast objętość ostrosłupa trójkątnego $CDNK$ to ćwierć objętości czworościanu $BCDE$, bo pole jego podstawy, czyli trójkąta CDN to połowa pola trójkąta BCD a wysokość z wierzchołka K to połowa wysokości czworościanu $BCDE$. Z tego wynika, że ta objętość równa jest $\frac{V}{2}$ i jest równa objętości ostrosłupa czworokątnego $KLMND$, bo ta ostatnia to $V - \frac{V}{2} = \frac{V}{2}$.

Wynika z tych rozważań, że środkiem ciężkości pięciościanu $KLMNCD$ jest środek odcinka, którego końcami są środki ciężkości ostrosłupów $CDNK$ i $KLMNDC$.

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ środkiem ciężkości stożka o wierzchołku W i podstawie P, która jest ograniczonym zbiorem miary dodatniej zawartym w płaszczyźnie $z = 0$, jest punkt $X = \frac{3}{4}S + \frac{1}{4}W$, gdzie S oznacza środek ciężkości podstawy P. W wypadku ostrosłupa trójkątnego jest to punkt $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}(C + D + N) + \frac{1}{4}K = \frac{1}{4}(C + D + N + K) = \frac{1}{4}\big(C + D + {} + \frac{1}{2}(B + C) + \frac{1}{2}(C + E)\big) = \frac{1}{8}B + \frac{1}{2}C + \frac{1}{4}D + \frac{1}{8}E$, a w wypadku ostrosłupa czworokątnego (którego podstawą jest równoległobok, a nawet kwadrat) punkt

$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}(K + M) + \frac{1}{4}D = \frac{3}{16}(E + C + D + B) + \frac{1}{4}D = \frac{3}{16}B + \frac{3}{16}C + \frac{7}{16}D + \frac{3}{16}E$,

więc środkiem ciężkości pięciościanu o objętości V jest punkt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}B + \frac{1}{2}C + \frac{1}{4}D + \frac{1}{8}E + \frac{3}{16}B + \frac{3}{16}C + \frac{7}{16}D + \frac{3}{16}E\right) = \\ = \frac{1}{32}(5B + 11C + 11D + 5E) = (0, -\tfrac{3}{8}, \tfrac{5}{16}\sqrt{2}).$$

Zadanie 1.3 Niech $SO(3)$ oznacza specjalna grupę ortogonalną rzędu 3, tj. zbiór złożony z takich macierzy kwadratowych A o 3 wierszach, że $A^TA = I$ i $\det A = 1\}$. $SO(3) =: M$ jest trójwymiarową rozmaitością zwartą w $\mathbb{R}^9$. Przekształcenie $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ na siebie jest obrotem o kąt $\theta(A)$ wokół pewnej prostej $\ell(A)$ przechodzącej przez $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$. Obliczyć wartość średnią funkcji θ, czyli wielkość

$$\frac{1}{\ell_M}\int_M \theta(A) \mathrm{d}\ell_M \,,$$

gdzie ℓ_M oznacza miarę Riemanna–Lebesgue'a na rozmaitości $M = SO(3)$.

Rozwiązanie

Ponieważ kolumny macierzy $A \in SO(3)$ mają długość 1 i są wzajemnie prostopadłe, więc przekształcenie liniowe określone za pomocą macierzy A jest izometrią, a ponieważ wyznacznik tej macierzy jest równy 1, więc ta izometria zachowuje orientację. Wielomian charakterystyczny macierzy A jest stopnia trzeciego, więc ma rzeczywisty pierwiastek, którego wartość bezwzględna jest równa jeden (bo to wartość własna izometrii!). Jeśli tą wartością własną jest -1, to wtedy iloczyn pozostałych dwu wartości własnych też jest równy -1, więc muszą one być rzeczywiste (nierzeczywiste byłyby sprzężone i ich iloczynem byłaby liczba 1). Wobec tego trzecią wartością własną jest liczba 1. Wykazaliśmy, że 1 jest wartością własną macierzy $A \in SO(3)$. Pozostałe dwie wartości własne mogą być rzeczywiste i wtedy obie są równe 1 albo obie są równe -1 lub nierzeczywiste i wtedy są liczbami zespolonymi, sprzężonymi o wartości bezwzględnej 1. Oczywiście oba rzeczywiste przypadki podpadają pod ten schemat: $\overline{\pm 1} = \pm 1$. Udowodniliśmy, że izometria ma prostą złożoną z punktów stałych i zachowuje orientację. Jeśli nie jest identycznością, to w każdej płaszczyźnie prostopadłej do prostej własnej odpowiadającej wartości własnej 1 ma dokładnie jeden punkt stały, więc jest obrotem wokół niego, zatem jest obrotem wokół prostej własnej odpowiadającej jedynce. Dodajmy jeszcze, że $M = SO(3)$ jest rozmaitością, co wynika z liniowej niezależności gradientów następujących sześciu funkcji (określonych na $\mathbb{R}^9$):

$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 - 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 - 1, \quad a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 - 1,$

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}, \quad a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33}, \quad a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33}$$
— ta liniowa niezależność jest natychmiastową konsekwencją liniowej niezależności kolumn macierzy $(a_{ij}) \in SO(3) = M$..

Znajdziemy macierz obrotu o kąt θ wokół prostej wyznaczonej przez wektor $\mathbf{v} = [a, b, c]$, przy czym zakładać możemy, że $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, więc że wektor $\mathbf{v}$ ma długość 1 — chodzi o konkretne wzory, które pozwolą obliczyć miarę M. Bez straty ogólności możemy również założyć, że $c \geqslant 0$, bo możemy zastąpić wektor $\mathbf{v}$ wektorem $-\mathbf{v}$ — oś obrotu nie zmieni się. Przypomnijmy, że macierzą obrotu o kąt θ wokół punktu $(0, 0)$ na płaszczyźnie jest $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, więc w obrocie o kąt θ wektor $\mathbf{e}_1$ przechodzi na wektor $\cos\theta \cdot \mathbf{e}_1 + \sin\theta \cdot \mathbf{e}_2$.
Niech $\mathbf{w} = [x, y, z]$ będzie dowolnym wektorem. Możemy napisać:
$$\mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + (\mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}),$$
więc przedstawiliśmy wektor $\mathbf{w}$ w postaci sumy wektora równoległego do $\mathbf{v}$ i wektora prostopadłego do $\mathbf{v}$. W obrocie o kąt prosty wokół $\mathbf{v}$ składowa równoległa do $\mathbf{v}$ nie zmienia się natomiast składowa prostopadła do $\mathbf{v}$, czyli $\mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$, przechodzi na wektor prostopadły do $\mathbf{v}$ i również prostopadły do $\mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$. Takimi wektorami są $\pm\mathbf{v} \times (\mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}) = \pm\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. W dalszym ciągu będziemy rozważać obrót przekształcający wektor $\mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$ na wektor $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (wybór znaku decyduje o tym, w którą stronę obracamy). W wyniku obrotu o kąt θ wektor $\mathbf{w}$ przechodzi na wektor $(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + \cos\theta(\mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}) + \sin\theta(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (1 - \cos\theta)(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + \cos\theta\,\mathbf{w} + \sin\theta(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

Wprowadzimy oznaczenie $A \odot B = \sum_{ij} a_{ij} \cdot b_{ij} = \sum_{i=1}^{k} (\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot b_{ij})$, gdzie A, B oznaczają macierze tego samego wymiaru $k \times m$, u nas będą to macierze wymiaru 3×3. Jest to oczywiście ich standardowy iloczyn skalarny, gdy traktujemy je jako elementy przestrzeni $\mathbb{R}^{mk}$, w naszym wypadku $\mathbb{R}^9$. Zauważmy, że jeśli A, B są macierzami kwadratowymi tego samego wymiaru i $A = A^T$ (A jest macierzą symetryczną) oraz $B = -B^T$ (B jest macierzą antysymetryczną) to $A \odot B = 0 = B \odot A$.

Dla takiego (a, b, θ), że $a^2 + b^2 < 1$ i $-\pi < \theta < \pi$ definiujemy
$$f(a, b, \theta) = (1 - \cos\theta) \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} + \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$
Nie rozpatrując $a^2 + b^2 = 1$ oraz $\theta = \pm\pi$ pomijamy podzbiór $SO(3) = M$, którego dwuwymiarowa miara Lebesgue'a–Riemanna jest zerem, więc nieistotny z punktu widzenia tego zadania. Jak łatwo można stwierdzić zachodzi równość
$$f(a, b, \theta) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1 - \cos\theta)(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + \cos\theta\,\mathbf{w} + \sin\theta\,(\mathbf{v} \times \mathbf{w}),$$
gdzie $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ mają takie znaczenie jak poprzednio przy $c = \sqrt{1 - a^2 - b^2}$. Zachodzą oczywiste równości $\frac{\partial c}{\partial a} = -\frac{a}{c}$ oraz $\frac{\partial c}{\partial b} = -\frac{b}{c}$. Korzystającv z nich otrzymujemy
$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, b, \theta) = (1 - \cos\theta) \begin{pmatrix} 2a & b & c - \frac{a^2}{c} \\ b & 0 & -\frac{ab}{c} \\ c - \frac{a^2}{c} & -\frac{ab}{c} & -2a \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{c} & 0 \\ -\frac{a}{c} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\frac{\partial f}{\partial b}(a,b,\theta) = (1-\cos\theta)\begin{pmatrix} 0 & a & -\frac{ab}{c} \\ a & 2b & c-\frac{b^2}{c} \\ -\frac{ab}{c} & c-\frac{b^2}{c} & -2b \end{pmatrix} + \sin\theta\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{c} & 1 \\ -\frac{b}{c} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i wreszcie

$\frac{\partial f}{\partial \theta}(a,b,\theta) = \sin\theta\begin{pmatrix} a^2-1 & ab & ac \\ ab & b^2-1 & bc \\ ac & bc & c^2-1 \end{pmatrix} - \cos\theta\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$

Widzimy, że każda z tych trzech pochodnych cząstkowych funkcji f jest sumą macierzy symetrycznej i antysymetrycznej (więc wektorów prostopadłych w $\mathbb{R}^9$). Mamy zatem $\left\|\frac{\partial f}{\partial a}\right\|^2 = \frac{\partial f}{\partial a}\odot\frac{\partial f}{\partial a} = (1-\cos\theta)^2\big(8a^2+2b^2+2(c-\frac{a^2}{c})^2+2\frac{a^2b^2}{c^2}\big)+\sin^2\theta\big(2\frac{a^2}{c^2}+2\big) =$
$= (1-\cos\theta)^2\big(2+2a^2+2\frac{a^4+a^2b^2}{c^2}\big)+2\sin^2\theta\frac{1-b^2}{c^2} = 2\frac{1-b^2}{c^2}\big((1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\big) =$
$= 4\frac{(1-b^2)(1-\cos\theta)}{c^2}$ — korzystaliśmy z równości $a^2+b^2+c^2=1$. Analogicznie
$\left\|\frac{\partial f}{\partial b}\right\|^2 = \frac{\partial f}{\partial b}\odot\frac{\partial f}{\partial b} = 4\frac{(1-a^2)(1-\cos\theta)}{c^2}$ oraz
$\left\|\frac{\partial f}{\partial \theta}\right\|^2 = \frac{\partial f}{\partial \theta}\odot\frac{\partial f}{\partial \theta} = \sin^2\theta\big((a^2-1)^2+(b^2-1)^2+(c^2-1)^2+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2\big)+$
$+\cos^2\theta(2a^2+2b^2+2c^2) = \sin^2\theta(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-2+3)+2\cos^2\theta =$
$=2\sin^2\theta+2\cos^2\theta=2$ — znów skorzystaliśmy z równości $a^2+b^2+c^2=1$.
Mamy też $\frac{\partial f}{\partial a}\odot\frac{\partial f}{\partial b} = (1-\cos\theta)^2(2ab-2ab+2\frac{a^3b}{c^2}-2ab+2\frac{ab^3}{c^2}+4ab)+2\frac{ab}{c^2}\sin^2\theta =$
$= \frac{2ab}{c^2}\big((1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\big) = \frac{4ab(1-\cos\theta)}{c^2}$. I dalej
$\frac{\partial f}{\partial a}\odot\frac{\partial f}{\partial \theta} = \sin\theta(1-\cos\theta)\big(2a(a^2-1)-2a(c^2-1)+2ab^2+2ac^2-2a^3-2ab^2\big)-$
$-\sin\theta\cos\theta(-2a+2a)=0$ i analogicznie $\frac{\partial f}{\partial b}\odot\frac{\partial f}{\partial \theta}=0$. Stąd wynika, że macierz Grama wektorów $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \frac{\partial f}{\partial \theta}$ wygląda tak:

$$\begin{pmatrix} \frac{4(1-b^2)(1-\cos\theta)}{c^2} & \frac{4ab(1-\cos\theta)}{c^2} & 0 \\ \frac{4ab(1-\cos\theta)}{c^2} & \frac{4(1-a^2)(1-\cos\theta)}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

więc pierwiastek z jej wyznacznika równy jest

$$4\frac{\sqrt{2}(1-\cos\theta)}{c^2}\sqrt{1-a^2-b^2} = 4\frac{\sqrt{2}(1-\cos\theta)}{c} = 4\sqrt{2}\frac{1-\cos\theta}{\sqrt{1-a^2-b^2}}.$$

Wynika stąd, że miarą M jest liczba
$\int_{a^2+b^2<1,|\theta|<\pi}\mathrm{d}\ell_3 = 4\sqrt{2}\int_{a^2+b^2<1}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos\theta}{\sqrt{1-a^2-b^2}}\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\ell_2 = 8\pi\sqrt{2}\int_{a^2+b^2<1}\frac{1}{\sqrt{1-a^2-b^2}}\mathrm{d}\ell_2 =$
$= 8\pi\sqrt{2}\int_0^1\left(\int_{\varphi=-\pi}^{\pi}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r = 16\pi^2\sqrt{2}\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r = 16\pi^2\sqrt{2}.$
Całka z kąta, a raczej z jego wartości bezwzględnej , to
$\int_{a^2+b^2<1,|\theta|<\pi}|\theta|\mathrm{d}\ell_3 = 4\sqrt{2}\int_{a^2+b^2<1}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\theta|(1-\cos\theta)}{\sqrt{1-a^2-b^2}}\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\ell_2 =$
$= 8\sqrt{2}\int_{a^2+b^2<1}\left(\int_0^{\pi}\frac{\theta(1-\cos\theta)}{\sqrt{1-a^2-b^2}}\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\ell_2 = 8\sqrt{2}\cdot\int_{a^2+b^2<1}\frac{1}{\sqrt{1-a^2-b^2}}\mathrm{d}\ell_2\cdot\int_0^{\pi}\theta(1-\cos\theta)\mathrm{d}\theta =$
$= 8\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{\theta^2}{2}-\theta\sin\theta-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} = 8\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{\pi^2}{2}+2\right) = 8\pi\sqrt{2}(\pi^2+4).$
Stąd wynika, że poszukiwana średnia wartość kąta (nieujemnego) równa jest

$$\frac{8\pi\sqrt{2}(\pi^2+4)}{16\pi^2\sqrt{2}} = \frac{\pi^2+4}{2\pi} = \frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}.$$

W stopniach to $\frac{\pi^2+4}{2\pi^2}\cdot 180^\circ \approx 90^\circ + 36{,}48^\circ = 126{,}48^\circ$.

Oczywiście wynik zależy od tego jak umieszczona została przestrzeń $SO(3)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^9$. Jednak umieściliśmy ją w sposób naturalny. Można sprawdzić (może warto?), że jeśli $A \in SO(3)$ i $X \subseteq SO(3)$ oraz X jest zbiorem mierzalnym, to miary zbiorów X oraz $AX = \{AB\colon \quad B \in X\}$ są równe. Oznacza to, że miara Lebesgue'a – Riemanna jest w tym wypadku związana z algebraiczną strukturą zbioru (grupy) $SO(3)$.

Zadanie 1.4 Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech B będzie kulą o środku $\mathbf{0}$ i promieniu 1 w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Załóżmy, że $f\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją klasy C^2, że

$$\int_B \int_B \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{n+1}} \mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y} < \infty\,.$$

Udowodnić, że funkcja f jest stała.
Udowodnić, że

$$\int_B \int_B \frac{|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{n}} \mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y} < \infty$$

dla każdej funkcji $\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow R,\ \ \varphi \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
Rozwiązanie
Zaczniemy od drugiej części. Ponieważ funkcja φ jest klasy C^1m więc funkcja określona na $\mathbb{R}^{2n}$ wzorami $r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y}) - D\varphi(\mathbf{y})(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}$ dla $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ oraz $r(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ jest ciągła na $\mathbb{R}^{2n}$. Wynika to natychmiast z ciągłości $D\varphi$ i z twierdzenia o wartości średniej:
$|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y}) - D\varphi(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \cdot \sup_{0<t<1} \|D\varphi(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) - D\varphi(\mathbf{y})\|$.[1]
Ponieważ funkcja r jest ciągłą, więc jest ograniczona na każdym zbiorze zwartym. Istnieje więc taka liczba $C > 0$, że $|r(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant C$ dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B$ oraz $\|D\varphi(\mathbf{y})\| \leqslant C$ dla każdego $\mathbf{y} \in B$. Stąd wynika, że

$$|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})| = |D\varphi(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + r(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leqslant 2C\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Stąd wynika, że $\frac{|\varphi(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^n} \leqslant \frac{2C}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{n-1}}$, a stąd, że $\int_B \frac{|\varphi(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^n}\mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant 2C\ell_n(B)$, więc $\int_B\int_B \frac{|\varphi(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^n}\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y} \leqslant 2C\ell_n(B)^2$, co kończy dowód drugiej części twierdzenia.

Zajmiemy się pierwszą częścią. W istocie rzeczy będzie to prawie to samo rozumowanie. Funkcję r definiujemy tak samo zastępując jedynie φ przez f. Jeśli $Df(\mathbf{y}) \neq 0$, to dla pewnego $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ mamy $Df(\mathbf{y})\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ i oczywiście jest tak również dla wektorów $\mathbf{w} \approx \mathbf{v}$, więc jest tak dla otwartego zbioru wektorów $\mathbf{w}$. Możemy założyć, że jest tak dla zwartego zbioru K o niepustym wnętrzu. Mamy wtedy dla pewnej liczby $a > 0$
$|f(\mathbf{y} + t\mathbf{w}) - f(\mathbf{y})| = |f(\mathbf{y} + t\mathbf{w}) - f(\mathbf{y}) - tDf(\mathbf{y})\mathbf{w} + tDf(\mathbf{y})\mathbf{w}| =$
$= \big|\|t\mathbf{w}\|r(\mathbf{y} + t\mathbf{w}, \mathbf{y}) + tDf(\mathbf{y})\mathbf{w}\big| \geqslant \big|tDf(\mathbf{y})\mathbf{w}| - \|t\mathbf{w}\| \cdot |r(\mathbf{y} + t\mathbf{w}, \mathbf{y})| \geqslant$
$\geqslant \big(a - |r(\mathbf{y} + t\mathbf{w}, \mathbf{y})|\big)\|t\mathbf{w}\|$ dla wszystkich $t \in [0, 1]$, więc istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $0 < t \leqslant \delta$ i $\mathbf{w} \in K$, to $|f(\mathbf{y} + t\mathbf{w}) - f(\mathbf{y})| \geqslant \frac{a}{2}\|t\mathbf{w}|$. Pozwala to oszacować liczbę $|\int_B \frac{|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^n}\mathrm{d}\mathbf{x}|$ **z dołu** przez $\frac{a}{2}\int_D \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{n+1}}$, a ta ostatnia całka jest równa $+\infty$.Przeczy to założeniu o skończoności całki. Wynika stąd, że $Df(\mathbf{y}) = 0$ dla każdego $\mathbf{y} \in B$. Stąd jednak wynika, że funkcja f jest stała na B.

Uwaga 1.1 W zasadzie w dowodzie drugiej części twierdzenia (czyli w pierwszej części rozwiązania) można od razu skorzystać z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej

[1] Tu można skorzystać z założenia, że φ jest klasy C^2 i oszacować tę różnicę dokładniej.

i stwierdzić, że funkcja klasy C^1 spełnia warunek Lipschitza z odpowiednią stałą na kazdym zbiorze zwartym i wypukłym.

Pierwszą część twierdzenia można dowieść, zakładając jedynie mierzalność funkcji f. Teza wtedy jest nieco słabsza: funkcja f jest stała prawie wszędzie, to znaczy po usunięciu z jej dziedziny pewnego zbioru miary 0. Zresztą tak to zadanie zostało zaproponowane, ale po rozmowach z niektórymi osobami prowadzącymi ćwiczenia zostało uproszczone (sens nie zmienił się, natomiast dowód uprościł się).