O zadaniu 1. z 20 stycznia 2020 r.

Uzasadnić, że równanie $x\exp(w-1) = 2y + \ln w$ określa w pewnym otoczeniu punktu $(2,1,1) \in \mathbb{R}^3(x,y,w)$ jednoznacznie wyznaczoną funkcję $w = g(x,y)$. Uzasadnić, że funkcja g jest klasy C^2. Niech $h(x,y) = g(x,y) + x - 2y$ dla (x,y) z dziedziny funkcji g. Czy funkcja h ma lokalne ekstremum w punkcie $(2,1)$?

Rozwiązanie, komentarze, zrzędzenie

Niech $f(x,y,w) = x\exp(w-1) - 2y - \ln w$. Mamy $f(2,1,1) = 2e^0 - 2 - \ln 1 = 0$. Dalej $\frac{\partial f}{\partial w}(x,y,w) = x\exp(w-1) - 2 - \frac{1}{w}$, zatem $\frac{\partial f}{\partial w}(2,1,1) = 2\exp(1-1) - 2 - \frac{1}{1} = -1 \neq 0$. Funkcja f jest klasy C^∞, bo funkcje $w \mapsto \exp(w-1)$ na $\mathbb{R}$, $w \mapsto \ln w$ na $(0,\infty)$ oraz $y \mapsto 2y$ są klasy C^∞, więc również funkcje $(x,y,w) \mapsto \exp(w-1)$ na $\mathbb{R}^3$, $(x,y,w) \mapsto \ln w$ na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(0,\infty)$ oraz $(x,y,w) \mapsto 2y$ na $\mathbb{R}^3$ są klasy C^∞. Więc f jest klasy C^∞ na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(0,\infty)$. Z twierdzenia o funkcjach uwikłanych wynika, że istnieje taka funkcja g klasy C^∞ zdefiniowana na pewnym otoczeniu punktu $(2,1)$, że $f(x,y,g(x,y)) = 0$.

Komentarz 1. Nie wystarcza tu stwierdzenie, że $\nabla f(2,1,1)$ jest wektorem niezerowym, ważna jest akurat pochodna $\frac{\partial f}{\partial w}(2,1,1)$. **Przepraszam** wszystkich tych, którym mogłem przez przeoczenie niesłusznie przyznać punkt za uzasadnienie istnienia funkcji g, a którzy powołali się na niezerowanie się gradientu funkcji. Mogliby uznać swoje rozumowanie za poprawne, a ono jest błędne. ■

Zróżniczkujemy równość $f(x,y,g(x,y)) = 0$. Dalej będę pisać g zamiast $g(x,y)$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ zamiast $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ i $\frac{\partial g}{\partial y}$ zamiast $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$. Otrzymujemy

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,g) + \frac{\partial f}{\partial w}(x,y,g)\cdot\frac{\partial g}{\partial x} = \exp(g-1) + \left(x\exp(g-1) - \frac{1}{g}\right)\frac{\partial g}{\partial x}. \tag{1}$$

Podstawiamy $x = 2, y = 1$ i $g(2,1) = 1$: $0 = e^0 + (2e^0 - 1)\frac{\partial g}{\partial x}(2,1)$, więc $\frac{\partial g}{\partial x}(2,1) = -1$ i $\frac{\partial h}{\partial x}(2,1) = 0$.

Podobnie otrzymujemy równość

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,g) + \frac{\partial f}{\partial w}(x,y,g)\cdot\frac{\partial g}{\partial y} = -2 + \left(x\exp(g-1) - \frac{1}{g}\right)\frac{\partial g}{\partial y}. \tag{2}$$

Z niej wynika, że dla $x = 2$, $y = 1$ i $g(2,1) = 1$ zachodzi równość $0 = -2 + (2e^0 - 1)\frac{\partial g}{\partial y}(2,1)$, zatem $\frac{\partial g}{\partial y}(2,1) = 2$ i wobec tego $\frac{\partial h}{\partial y}(2,1) = 0$.

W punkcie $(2,1)$ pochodne funkcji h zerują się, więc jest to kandydat na punkt, w którym funkcja h ma lokalne ekstremum. Aby wyjaśnić, czy ma w nim ekstremum i czy jest to lokalne minimum, czy też lokalne maksimum, obliczymy pochodne drugiego rzędu w punkcie $(2,1)$, które zresztą pokrywają się z pochodnymi drugiego rzędu funkcji g, bo ich różnicą jest wielomian pierwszego stopnia. W tym celu zróżniczkujemy równości (1) i (2). Najpierw (1) względem x.

$$0 = 2\exp(g-1)\frac{\partial g}{\partial x} + \left(x\exp(g-1) + \frac{1}{g^2}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(x\exp(g-1) - \frac{1}{g}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\ .$$

Podstawiamy $x = 2, y = 1$: $0 = 2\cdot 1\cdot(-1) + (2\cdot 1 + 1)(-1)^2 + (2\cdot 1 - 1)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(2,1)$, więc $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(2,1) = -1$.

Teraz równość (2) względem x.

$$0 = \exp(g-1)\frac{\partial g}{\partial y} + \left(x\exp(g-1) + \frac{1}{g^2}\right)\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + \left(x\exp(g-1) - \frac{1}{g}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\ .$$

Znów podstawiamy: $0 = 1\cdot 2 + (2\cdot 1 + 1)\cdot(-1)\cdot 2 + (2\cdot 1 - 1)\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(2,1)$, zatem $\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(2,1) = 4$.

I w końcu (2) względem y.

$$\left(x\exp(g-1) + \frac{1}{g^2}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(x\exp(g-1) - \frac{1}{g}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\ .$$

Stąd, po podstawieniu $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -12$. Otrzymujemy równość $d^2 g(2,1) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$.

Zauważmy, że $d^2g(2,1)((x,y),(x,y)) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -x^2 + 8xy - 12y^2 =$ $= -(x-4y)^2 + 4y^2$, więc ta forma kwadratowa przyjmuje wartości dodatnie, np. dla $x = 4, y = 1$ oraz wartości ujemne, np. dla $x = 1, y = 0$. Wobec tego w punkcie $(2,1)$ funkcja h ma siodło, dokładniej: po obcięciu do prostej równoległej do wektora $(4,1)$ przechodzącej przez punkt $(2,1)$ ma ona lokalne maksimum właściwe, a po obcięciu do prostej równoległej do wektora $(0,1)$ przechodzącej przez punkt $(2,1)$ — lokalne minimum właściwe, wobec tego w dowolnym otoczeniu punktu $(2,1)$ znajdują się punkty, w których wartości funkcji h są mniejsze niż $h(2,1) = 0$ oraz punkty w których wartości funkcji h są większe niż $h(2,1) = 0$. W punkcie h nie ma więc lokalnego ekstremum.

Komentarz 2. Można było różniczkować iloraz w celu obliczenia pochodnych drugiego rzędu funkcji g, czyli pochodnych drugiego rzędu funkcji h. Uznałem, że wolę nie różniczkować ilorazu, bo podany wyżej sposób obliczania pochodnych drugiego rzędu jest bezpieczniejszy, gdyż stwarza mniej okazji do pomyłek. To oczywiście pogląd subiektywny. Wielu piszących demonstrowało znajomość twierdzenia o funkcjach uwikłanych dla funkcji klasy C^1 i traktowało wersję dla klasy C^2 (i wyższych) jako coś nadzwyczajnego – to przejaw nieuctwa i niczego więcej, było na wykładzie!!!. ■

Komentarz 3. Część piszących pisała, że forma $d^2g(2,1)$ jest nieokreślona argumentując to na ogół tym, że wyznacznik tej macierzy kwadratowej jest ujemny. Oceniając miałem z tym problem, bo nie było dla mnie jasne, co pisząca/piszący miała/miał na myśli. Macierz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ również nie jest dodatnio ani ujemnie określona, więc jest nieokreślona, ale z tego że druga różniczka jest nią, nic nie wynika: tak jest dla każdej z funkcji x^4+y^4, $-x^4+y^4$, $-x^4-y^4$, a pierwsza z nich ma w $(0,0)$ lokalne minimum właściwe, druga siodło, trzecia lokalne maksimum właściwe. Wyżej podałem dokładny powód, dla którego h nie ma w punkcie $(2,1)$ lokalnego ekstremum. Można dopowiedzieć, że druga pochodna funkcji $t \mapsto h(2+at, 1+bt)$ w punkcie 0 to liczba $d^2g(2,1)((a,b),(a,b))$, co już w jawny sposób redukuje problem do funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Można było, jak to zrobiło kilka osób, napisać, że wartości własne macierzy $d^2g(2,1)$ są różnych znaków, co wynika np. z tego, że są one rzeczywiste, a ich iloczyn to wyznacznik tej macierzy, który jest ujemny. Wymieniane tu własności to stwierdzenia zdecydowanie silniejsze od *forma kwadratowa jest nieokreślona: chodzi o to, że przyjmuje ona wartości różnych znaków.* ■

Osoby, które napisały, że funkcja h ma w punkcie $(2,1)$ lokalne maksimum, bo macierz $d^2g(2,1)$ jest ujemnie określona, bo jej wyznacznik jest ujemny, powinny być nagrodzone zerem za całe zadanie, bo zadeklarowały całkowite niezrozumienie problemu. Udawałem, że to normalny błąd. Oczywiście nie powinienem, bo to jest błąd kryminalny, a duża część naszego społeczeństwa jest za jak najsurowszym karaniem kryminalistów. Powodem było to, że u wielu osób pojawiły się na tyle mętne stwierdzenia, że nie mogłem uczciwie stwierdzić ani poprawności argumentu ani fałszywości. Uznałem, że w tej sytuacji nie mogę ostro tego oceniać.

Komentarz 4 (zrzędzenie). Wiele osób z różnych grup pisało, że np. twierdzenie o funkcjach uwikłanych znają jest z ćwiczeń. Moim zdaniem prof. dr hab. Piotr Mormul powinien w czasie egzaminu sprawdzić, czy autorzy takich zdań znają dowód TFU. Prawie na pewno na ćwiczeniach nie było. Powoływały się więc na niewłaściwe źródło. W dodatku informowały czytającego rozwiązania, że nie chodzą na wykład (nieobowiązkowy, więc **niby** w porządku) i nie czytają notatek, ani książek, więc nie studiują, lecz usiłują otrzymać pozytywną oceną minimalnym nakładem pracy (a to już w porządku nie jest). Oczywiście wykładowca dowiedział się ode mnie, co ja o tym myślę. Wykłady są nieobowiązkowe. To prawda. Nie oznacza to jednak, że wolno na ćwiczeniach nie znać twierdzeń z wykładu. Należy je poznać i to z dowodami. Książki, jakieś notatki, skrypty mogą pomóc, można więc nie chodzić na wykład. Jednak trzeba do nich zajrzeć. Studiowanie matematyki to m.in. sprawdzanie jak różni ludzie dowodzą różne twierdzenia, definiują pojęcia, jakie dają zadania itp. ■'