Analiza Matematyczna II.2, egzamin poprawkowy
7 września 2015 r., godz. 15:05 — 19:05

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Niech $L_1(x,y,z) = z$, $L_2(x,y,z) = 32x - 8y - 15z$. $L_3(x,y,z) = -16x + 24y - 5z$, $L_4(x,y,z) = -8x - 8y + 5z + 80$ i $L_5(x,y,z) = 4x + 4y - 5z - 20$. Definiujemy zbiór $A = \big\{(x,y,z)\colon \quad L_j(x,y,z) \geqslant 0,\ \text{dla } j = 1,2,3,4,5.\big\}$. Znaleźć środek ciężkości zbioru A (względem miary Lebesgue'a).

---

2. Niech $a, r > 0$ i $M = \{(x,y,z)\colon \quad x^2+y^2+z^2 = r^2\}$, $P = \{(x,y,z)\colon \quad x^2+y^2+z^2 \leqslant r^2\}$, Obliczyć całki $\int_M ((x-a)^2 + y^2)\,\mathrm{d}\ell_M$ i $\int_P ((x-a)^2 + y^2)\,\mathrm{d}\ell_3$.

---

3. Udowodnić, że jeśli krzywa $\gamma\colon [7,9] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, klasy C^1, nie przechodzi przez punkt $(0,0)$ i spełnia warunki: $7 \leqslant s < t < 9 \Longrightarrow \gamma(s) \neq \gamma(t)$ i $\gamma(7) = \gamma(9)$, to

$$\int_\gamma \frac{(x^3 - 3xy^2)\,\mathrm{d}x + (3x^2y - y^3)\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^3} = 0\,.$$

---

4. Udowodnić, że jeśli $M \subset \mathbb{R}^3$ jest zwartą rozmaitością orientowalną wymiaru 2, klasy C^∞, to istnieje taka funkcja $\mathfrak{n}\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ klasy C^∞ (tzn. złożenie $\mathfrak{n} \circ \varphi$ jest klasy C^∞ dla każdej lokalnej parametryzacji φ klasy C^∞), że $\mathfrak{n}(\mathbf{p}) \perp T_{\mathbf{p}}M$ i $\|\mathfrak{n}(\mathbf{p})\| = 1$ dla każdego punktu $\mathbf{p} \in M$. Niech $\omega(\mathbf{p})(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathfrak{n}(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ dla dowolnych $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M$.
Dowieść, że ω jest formą stopnia 2, klasy C^∞ na rozmaitości M, tzn. $\varphi^*\omega$ jest klasy C^∞ dla każdej lokalnej parametryzacji φ.
Obliczyć $\int_M \omega$, gdy M jest rozmaitością powstałą w wyniku obrotu okręgu $x^2 + y^2 = 49$ wokół prostej $x + y = 10$.

---

5. Dla jakich $a > 0$ funkcja $\frac{1}{|x-y+z|^a}$ (określona prawie wszędzie na $\mathbb{R}^3$) jest całkowalna na zbiorze:

(a) $\{(x,y,z)\colon \quad 0 < |x|, |y|, |z| < 1\}$, (b) $\{(x,y,z)\colon \quad x > 10, |y|, |z| < 1\}$.
