Analiza Matematyczna II.2, egzamin
24 czerwca 2015 r., godz. 9:10 — 12:10

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Definiujemy zbiór
$A = \big\{(x,y,z)\colon \quad z \geqslant 0,\ |x|\sqrt{6} + y\sqrt{2} + z \leqslant 2\sqrt{2},\ 2y\sqrt{2} - z \geqslant -2\sqrt{2},\ 2y + \sqrt{2}z \leqslant 1\,\big\}.$
Znaleźć środek ciężkości zbioru A (względem miary Lebesgue'a).

---

2. Niech M oznacza sumę wszystkich odcinków, których końcami są punkty $(\cos t, \sin t, 0)$ i $(0,0,t)$ dla $t \in (-\pi, \pi)$.

(a) Dowieść, że pole tej powierzchni jest mniejsze od $\pi\sqrt{\pi^2+1} + \ln(\pi + \sqrt{\pi^2+1})$.

(b) Obliczyć całkę $\int_M \operatorname{rot}([-y,x,0](x^2+y^2)) \cdot \mathfrak{n}(x,y,z)\,\mathrm{d}\ell_M$, gdzie $\mathfrak{n}$ jest polem jednostkowych wektorów normalnych do M i $\mathfrak{n}\big(\frac{1}{2},0,0\big) = \big(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big)$

---

3. Niech $\omega = \dfrac{(x+1)dy - ydx}{(x+1)^2+y^2} - \dfrac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2+y^2}$.

Wykazać, że istnieje taka funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 - [-1,1]\times\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $\omega = df$, ale nie ma takiej funkcji $g\colon \mathbb{R}^2 - \{(1,0),(-1,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $\omega = dg$.

---

4. Niech $v(x,y,z) = (x^2, x+y, y-x)$ oraz $w(x,y,z) = (yz, y-z, xz)$ dla każdego punktu $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Dla dowolnego wektora u zaczepionego w punkcie (x,y,z) określamy liczbę $\eta(u) = \det(u,v,w)$.

a) Wykazać, że przyporządkowanie η zadaje jednoformę na $\mathbb{R}^3$.

b) Obliczyć $d\eta$.

c) Obliczyć całkę z $d\eta$ po zbiorze $x^2+y^2+z^2 = 1, x > 0$. Orientację w punkcie $(1,0,0)$ wyznacza wektor $(1,0,0)$

---

5. Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech B będzie kulą o środku $\mathbf{0}$ i promieniu 1 w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Załóżmy, że $f\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją klasy C^2, że

$$\int_B \int_B \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{n+1}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{y} < \infty\,.$$

Udowodnić, że funkcja f jest stała.

Udowodnić, że

$$\int_B \int_B \frac{|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{n}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{y} < \infty$$

dla każdej funkcji $\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow R,\ \ \varphi \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
