Analiza Matematyczna II.1, kolokwium
9 stycznia 2015, godz. 16:15 — 19:15

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

0. Podać definicję zbioru miary 0.

Udowodnić, że jeśli $A = \{(x, y, z) \colon \quad (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0\}$, to $\ell_3(A) = 0$.

---

1. Znaleźć odległość pomiędzy gałęzią hiperboli $H = \{(x, y) \colon \quad xy + x + y = 0 \text{ i } x > -1\}$ i prostą $L = \{(x, y) \colon \quad x + 2y + 1 = 0\}$.

---

2. Zbadać, czy zbiór $S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \colon \quad (x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2\}$ jest rozmaitością.

Niech M oznacza podzbiór $\mathbb{R}^3$ powstały w wyniku obrotu S wokół osi OX.

Opisać zbiór M równaniem. Czy $M \setminus \{(0, 0, 0)\}$ jest rozmaitością?

---

3. Znaleźć wszystkie punkty krytyczne funkcji $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(\frac{3}{4}x^2 + y - 1)$. Dla każdego z nich rozpoznać, czy f ma w tym punkcie lokalne minimum, lokalne maksimum czy też lokalnego ekstremum nie ma.

---

4. Udowodnić, że w pewnym otoczeniu punktu $(x_0, y_0, w_0) = (2, -1, 1)$ równanie

$$xw = 2 + y \ln w$$

wyznacza zmienną w jako funkcję klasy C^2 pozostałych zmiennych: $w = w(x, y)$.

Napisać jej drugi wielomian Taylora wokół punktu $(x_0, y_0) = (2, -1)$.

---

5. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ rozważmy macierz J rozmiaru $2n \times 2n$ o postaci klatkowej $J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \cdot 2n}$, gdzie I_n oznacza macierz jednostkową, a 0_n — macierz zerową rozmiaru $n \times n$.

Udowodnić, że dla każdego $A \in \mathbb{R}^{2n \cdot 2n}$ macierz $F(A) := AJA^T$ jest antysymetryczna, tzn. $F(A) + F(A)^T = 0_{2n}$.

Dowieść, że $DF(A)H = \psi(\varphi(H))$ dla każdej macierzy H, gdzie $\varphi(B) = AJB^T$ oraz $\psi(C) = C - C^T$. Znaleźć obraz przekształcenia $DF(A) \colon \mathbb{R}^{2n \cdot 2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n \cdot 2n}$.

Udowodnić, że zbiór $\{A \in \mathbb{R}^{2n \cdot 2n} \colon AJA^T = J\}$ jest rozmaitością klasy C^1. Jaki jest jej wymiar?
