Analiza Matematyczna II.1, kolokwium – rozwiązania
9 stycznia 2015, godz. 16:15 — 19:15

---

0. Podać definicję zbioru miary 0.

Udowodnić, że jeśli $A = \{(x, y, z): \quad (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0\}$, to $\ell_3(A) = 0$.

Zbiorem miary zero jest każdy zbiór, którego miarą jest 0.

W wypadku miary Lebesque'a w przestrzeni k–wymiarowej jest to taki zbiór $B \subseteq \mathbb{R}^k$, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją takie k–wymiarowe przedziały $P_1, P_2, \ldots,$ że $B \subseteq P_1 \cup P_2 \cup \ldots$ i $\mathrm{vol}(P_1) + \mathrm{vol}(P_2) + \ldots < \varepsilon$.

Zbiór $\{(x, y, z): \quad x - y = 0\}$ jest wykresem funkcji $f_1 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $x = f_1(y, z) = y$, więc ma miarę 0.

Zbiór $\{(x, y, z): \quad x + y = 0\}$ jest wykresem funkcji $f_2 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $x = f_2(y, z) = -y$, więc ma miarę 0.

Zbiór $\{(x, y, z): \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \ z \geqslant 0\}$ jest wykresem funkcji $f_3 \colon \bar{B}(\mathbf{0}, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $z = f_3(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, więc ma miarę 0.

Zbiór $\{(x, y, z): \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \ z \geqslant 0\}$ jest wykresem funkcji $f_4 \colon \bar{B}(\mathbf{0}, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $z = f_4(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, więc ma miarę 0.

Zbiór $A = \{(x, y, z): \quad (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0\}$ jest więc sumą czterech zbiorów miary, więc jego miarą jest 0.

Uwaga. Mogliśmy też było napisać, że każde z trzech równań: $x - y = 0$, $x + y = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ opisuje rozmaitość (bo gradient każdej z trzech funkcji trzech zmiennych jest niezerowy w każdym punkcie badanego zbioru) wymiaru 2, więc mniejszego od 3 i wobec tego jest to lokalnie suma co najwyżej przeliczalnie wielu wykresu funkcji rzeczywistych dwu zmiennych.

---

1. Znaleźć odległość pomiędzy gałęzią hiperboli $H = \{(x, y): \quad xy + x + y = 0 \text{ i } x > -1\}$ i prostą $L = \{(x, y): \quad x + 2y + 1 = 0\}$.

Należy znaleźć najmniejszą wartość kwadratu odległości punktu (x, y) leżącego w zbiorze H od punktu (u, v) leżącego w zbiorze L, czyli najmniejszą wartość wyrażenia (funkcji czterech zmienych) $(x-u)^2 + (y-v)^2$ przy założeniu, że $0 = xy + x + y = (x+1)(y+1) - 1$ oraz $0 = u + 2v + 1 = (u + 1) + 2(v + 1) - 2$. Gradienty funkcji (zmiennych u, v, x, y) $xy + x + y$ i $u + 2v + 1 = 0$ są równe $(0, 0, y + 1, x + 1)$ i $(1, 2, 0, 0)$. Są one liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $(0, 0, y + 1, x + 1)$ jest wektorem niezerowym, więc gdy $(x, y) \neq (-1, -1)$, ale tak jest, bo $(-1 + 1)(-1 + 1) - 1 = -1 \neq 0$. Możemy więc zastosować twierdzenie Lagrange'a. Zgodnie z nim, jeśli funkcja $(x - u)^2 + (y - v)^2$ ma najmniejszą wartość w punkcie (u, v, x, y), to istnieją takie liczby λ_1, λ_2, że spełniona jest równość

$$2(u - x, v - y, x - u, y - v) = \lambda_1(0, 0, y + 1, x + 1) + \lambda_2(1, 2, 0, 0) =$$
$$= (\lambda_2, 2\lambda_2, \lambda_1(y + 1), \lambda_1(x + 1)).$$

Jeśli $\lambda_1 = 0$, to $x = u$ i $y = v$. To jest niemożliwe, bo wtedy zachodziłyby równości $0 = (x+1)(y+1) - 1$ i $(x+1) + 2(y+1) - 2 = 0$, więc $2 = (x+1)\cdot 2(y+1) \leqslant \leqslant \left(\frac{x+1+2(y+1)}{2}\right)^2 = 1$, co oczywiście nie jest możliwe. Wobec tego $\lambda_1 \neq 0$. Analogicznie $\lambda_2 \neq 0$. Wobec tego $v - y = 2(u-x)$ i dalej $x + 1 = 2(y+1)$. Stąd wynika, że $0 = 2(y+1)^2 - 1$. Ponieważ $x > -1$, więc $y + 1 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz $x + 1 = \sqrt{2}$. Ponieważ $2u - v = 2x - y = 2(x+1) - (y+1) - 1$, więc $2u - v = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 1$. W połączeniu z równaniem $u + 2v = -1$ daje to $5u = 3\sqrt{2} - 3$ i $5v = -\frac{3}{2}\sqrt{2} - 1$, czyli $u = \frac{3\sqrt{2}-3}{5}$, $v = -\frac{3\sqrt{2}+2}{10}$, $x = \sqrt{2} - 1$, $y = \frac{\sqrt{2}-2}{2}$. Jest więc tylko jeden kandydat na punkt, w którym funkcja $(x-u)^2 + (y-v)^2$ przyjmuje wartość najmniejszą. Tą wartością byłaby liczba

$$\left(\sqrt{2} - 1 - \frac{3\sqrt{2}-3}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}-2}{2} + \frac{3\sqrt{2}+2}{10}\right)^2 = \left(\frac{2(\sqrt{2}-1)}{5}\right)^2 + \left(\frac{4(\sqrt{2}-1)}{5}\right)^2 = \frac{4(\sqrt{2}-1)^2}{5} < \frac{1}{5}.$$

Z równości $(x+1)(y+1) = 1$ i nierówności $x > -1$ wynika, że $x + 1 > 0$ i $y + 1 > 0$. Z wzoru $u + 2v + 1 = 0$ wynika, że jeśli $u \geqslant 3$ wynika, to $v = -\frac{1}{2}(1+u) \leqslant -2$ i wtedy $(x-u)^2 + (y-v)^2 \geqslant (y-v)^2 = ((y+1) - (v+1))^2 \geqslant ((-(v+1))^2 \geqslant 1$. Jeśli $u \leqslant -2$, to $(x-u)^2 + (y-v)^2 \geqslant (x-u)^2 = ((x+1) - (u+1))^2 \geqslant (-(u+1))^2 \geqslant 1$. Wobec tego kresu dolny funkcji $(x-u)^2 + (y-v)^2$ w całej dziedzinie jest taki sam jak kres dolny w dziedzinie ograniczonej do zbioru tych jej punktów, dla których $-2 \leqslant u \leqslant 3$. W tym zbiorze jest też spełniona nierówność $-2 \leqslant v \leqslant \frac{1}{2}$. Można dziedzinę ograniczyć jeszcze bardziej i rozpatrywać jedynie te jej punkty, dla których $(x-u)^2 + (y-v)^2 \leqslant 1$,
więc do zbioru zwartego. W zbiorze zwartym kres dolny jest osiągany i to w punkcie, w którym wartość funkcji jest mniejsza od $\frac{1}{5}$, co oznacza, że wszystkie nierówności definiujące ten zbiór są ostre. Wobec w tym punkcie spełniony jest warunek Lagrange'a. Oznacza to, że kresem dolnym tej funkcji jest liczba $\frac{4(\sqrt{2}-1)^2}{5} < \frac{1}{5}$, czyli że kres dolny odległości punktów zbioru H od punktów zbioru L jest równy $\sqrt{\frac{4(\sqrt{2}-1)^2}{5}} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{5}}$.

Uwaga. Można to napisać krócej. Niech $P \in H$, $Q \in L$ i niech PQ będzie najkrótszym z odcinków łączących hiperbolę H z prostą L. Odcinek PQ musi być prostopadły zarówno do L jak i do $T_P H$ — uzasadnić można to stwierdzenie geometrycznie lub za pomocą twierdzenia Lagrange'a o ekstremach związanych. Wobec tego styczna do hiperboli w punkcie P musi być równoległa do L. Stąd wynika, że gradient funkcji $xy + x + y + 1$ w punkcie $P = (x,y,z)$ musi być równoległy do wektora $[1,2,0]$. Gradientem jest wektor $[y+1, x+1, 0]$, więc wektor $[\frac{1}{x+1}, x+1, 0]$. Te wektory są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $[0,0,0] = [1,2,0] \times [\frac{1}{x+1}, x+1, 0] = [x + 1 - \frac{2}{x+1}, 0, 0]$, więc wtedy i tylko wtedy, gdy $(x+1)^2 = 2$, tzn $x = \sqrt{2} - 1$ (przypominam, że $x + 1 > 0$). Wtedy $y = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}-1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}-2}{2}$. Trzeba jeszcze znaleźć rzut prostopadły tego punktu na prostą L. Jest nim punkt postaci $Q = (\sqrt{2}-1, \frac{\sqrt{2}-2}{2}, 0) + t(1,2,0)$, gdzie t jest taką liczbą, że $Q \in L$, czyli $0 = \sqrt{2} - 1 + t + 2(\frac{\sqrt{2}-2}{2} + 2t) + 1 = 5t + 2(\sqrt{2}-1)$, czyli $t = -\frac{2}{5}(\sqrt{2}-1)$. Poszukiwana odległość to $\|t(1,2,0)\| = \frac{2}{5}(\sqrt{2}-1)\sqrt{5} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{5}}$. $\square$

Można było też rozpatrywać funkcję $(x + 2v + 1)^2 + \left(\frac{1}{x+1} - 1 - v\right)^2$ w zbiorze

$\{(v,x)\colon\quad -1<x,\ -\infty<v<\infty\}$, więc funkcję dwu (a nie czterech) zmiennych w półpłaszczyźnie otwartej unikając w ten sposób pochodnych. Niech $t=x+1$. Wtedy $(x+2v+1)^2+\big(\frac{1}{x+1}-1-v\big)^2=(t+2v)^2+(\frac1t-v-1)^2=5v^2+2v(2t+1-\frac1t)+(\frac1t-1)^2+t^2=$ $=5\left(v+\frac15(2t+1-\frac1t)\right)^2-\frac15\left(2t+(1-\frac1t)\right)^2+(\frac1t-1)^2+t^2\geqslant\frac45(\frac1t-1)^2+\frac{4(t-1)}{5}+\frac15t^2=$ $=\frac15\left(\frac2t-2+t\right)^2=\ \frac15\left(\left(\frac{\sqrt2}{\sqrt t}-\sqrt t\right)^2+2\sqrt2-2\right)^2\geqslant\frac15\left(2\sqrt2-2\right)^2$ przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $t=\sqrt2$.

O wyborze sposobu rozwiązywania zadania w czasie klasówki student decyduje sam, a zadanie mógł rozwiązać uczeń II klasy LO (chyba nie każdy).

---

2. Zbadać, czy zbiór $S=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3\colon\quad(x^2+y^2-x)^2=x^2+y^2\}$ jest rozmaitością. Niech M oznacza podzbiór $\mathbb{R}^3$ powstały w wyniku obrotu S wokół osi OX.

Opisać zbiór M równaniem. Czy $M\setminus\{(0,0,0)\}$ jest rozmaitością?

Niech $f(x,y)=(x^2+y^2-x)^2-(x^2+y^2)$. Mamy więc $\frac{\partial f}{\partial x}=2(2x-1)(x^2+y^2-x)-2x$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}=2y(2(x^2+y^2-x)-1)$, więc jeśli grad $f(x,y)=(0,0)$, to $y=0$ i wtedy $0=2(2x-1)(x^2-x)-2x=2x(2x^2-3x)$, więc $x=0$ lub $x=\frac32$ lub $0=2(x^2+y^2-x)-1$, czyli $x^2+y^2-x=\frac12$, ale wtedy $\frac{\partial f}{\partial x}=2(2x-1)(x^2+y^2-x)-2x=(2x-1)-2x=-1\neq0$. Punkt $\left(\frac32,0,0\right)$ nie jest elementem zbioru S. Wobec tego po usunięciu punktu $(0,0,0)$ ze zbioru S otrzymujemy rozmaitość jednowymiarową w $\mathbb{R}^3$. Niech $(x_n,y_n,0)\in S\setminus\{(0,0,0)\}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n,0)=(0,0,0)$. Z równości $(x_n^2+y_n^2-x_n)^2=x_n^2+y_n^2$ wynika, że albo $x_n^2+y_n^2-x_n=\sqrt{x_n^2+y_n^2}$ albo $x_n^2+y_n^2-x_n=-\sqrt{x_n^2+y_n^2}$. Jeśli $x_n^2+y_n^2<1$, to $\sqrt{x_n^2+y_n^2}>x_n^2+y_n^2$, więc z równości $x_n^2+y_n^2-x_n=\sqrt{x_n^2+y_n^2}$ wynika wtedy, że $x_n<0$. Z równości $x_n^2+y_n^2-x_n=-\sqrt{x_n^2+y_n^2}$ wynika, że $x_n^2+y_n^2=x_n-\sqrt{x_n^2+y_n^2}\leqslant0$, co jest niemożliwe, bo $x_n^2+y_n^2>0$. Wobec tego $x_n<0$, gdy $x_n^2+y_n^2<1$. Załóżmy, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(x_n,y_n,0)}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}=\mathbf{v}$ — interesują nas teraz wektory styczne do S w punkcie $(0,0,0)$. Mamy więc $x_n^2+y_n^2-x_n=\sqrt{x_n^2+y_n^2}$, czyli $\sqrt{x_n^2+y_n^2}-\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}=1$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n^2+y_n^2}=0$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}=-1$, a z równości $\|\mathbf{v}\|=1$ wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}=0$. Udowodniliśmy w ten sposób, że $T_{(0,0,0)}S=\{(-t,0,0)\colon\quad t\geqslant0\}$, więc to nie jest przestrzeń liniowa, zatem S nie jest rozmaitością.

Może zająć się zbiorem M. Odległość punktu (x,y,z) od osi OX jest równa $\sqrt{y^2+z^2}$. W płaszczyźnie $z=0$ leżą punkty $(x,\pm\sqrt{y^2+z^2},0)$ — oba w tej samej odległości od osi OX co punkt (x,y,z), więc po obrocie o odpowiedni kąt wokół osi OX punkt (x,y,z) trafia na jeden z nich. Stąd wynika, że równaniem M jest $\left(x^2+\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^2-x\right)^2=$ $=x^2+\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^2$, czyli równanie $(x^2+y^2+z^2-x)^2=x^2+y^2+z^2$. Aby rzecz bardziej sformalizować można jeszcze powiedzieć, że jeśli zachodzi ostatnie równanie i oznaczymy $\rho=\sqrt{y^2+z^2}$, to istnieje wtedy taka liczba φ, że $y=\rho\cos\varphi$ i $z=\rho\sin\varphi$, a to oznacza, że $(x,y,z)\in M$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x,\rho,0)\in S$, czyli że po obróceniu S otrzymujemy M. Zbiór $M\setminus\{(0,0,0)\}$ jest rozmaitością, co można uzasadnić co najmniej dwiema metodami. Obliczamy gradient funkcji $F(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2-x)^2-(x^2+y^2+z^2)$.

Otrzymujemy

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(2x-1)\,(x^2+y^2+z^2-x) - 2x,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y\,(2(x^2+y^2+z^2-x)-1),$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z\,(2(x^2+y^2+z^2-x)-1).$$

Przyrównujemy go do $(0,0,0)$. Z równości $2(x^2+y^2+z^2-x)-1=0$ wynika, że $0=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=0 \iff (2x-1)-2x=-1$, co wyklucza tę opcję. Stąd wynika, że $y=z=0$ i $0=2(2x-1)(x^2-x)-2x=2x(2x^2-3x)$ co, jak już wiemy, prowadzi do wniosku, że $x=0$ lub $x=\frac{3}{2}$, z czego wynika, że jedynym punktem zbioru M, w którym gradient funkcji F znika, jest punkt $(0,0,0)$, co kończy uzasadnienie stwierdzenia „$M\setminus\{(0,0,0)\}$ jest dwuwymiarową rozmaitością w $\mathbb{R}^3$".

Uwaga. Użyjemy współrzędnych biegunowych: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Mamy więc $0=(x^2+y^2-x)^2-(x^2+y^2)=(r^2-r\cos\varphi)^2-r^2=r^2(r-\cos\varphi-1)(r-\cos\varphi+1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r=0$ lub $r-\cos\varphi-1=0$ lub $r-\cos\varphi+1=0$. Jeśli $r=0$, to również $x=0=y$. Dalej $r>0$. Jeśli $r-\cos\varphi+1=0$, to $0<r=\cos\varphi-1\geqslant 0$ — sprzeczność. Wobec tego $r=1+\cos\varphi$ przy czym $\cos\varphi>-1$ (przyp. $r>0$). Przekształcenie $(r,\varphi)\mapsto(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$ rozpatrujemy więc na zbiorze $\{(r,\varphi)\colon\quad r>0,\ |\varphi|<\pi\}$, a na tym zbiorze jest ono dyfeomorfizmem, który przekształca otwarty pas poziomy na płaszczyznę bez jednej domkniętej półprostej (niedodatniej półosi OX). Obraz dyfeomorficzny rozmaitości jest rozmaitością — to wynika łatwo z którejkolwiek definicji rozmaitości, zatem $M\setminus\{(0,0,0)\}$ jest jednowymiarową rozmaitością w $\mathbb{R}^3$. Całe M nie jest, bo zbiór wektorów stycznych w punkcie $(0,0,0)$ do M nie jest przestrzenią liniową: jeśli $(r_n\cos\varphi_n,r_n\sin\varphi_n,0)\xrightarrow[n\to\infty]{}(0,0,0)$, to $1+\cos\varphi_n=r_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, zatem $\cos\varphi_n\xrightarrow[n\to\infty]{}-1$, więc $\varphi_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\pm\pi$, co przekonuje nas o tym, że $\frac{(r_n\cos\varphi_n,r_n\sin\varphi_n,0)}{r_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}(-1,0,0)$, a to dowodzi tego, że $T_{(0,0,0)}S=\{(-t,0,0)\colon\quad t\geqslant 0\}$.

---

3. Znaleźć wszystkie punkty krytyczne funkcji $f(x,y)=(x^2+y^2-1)(\frac{3}{4}x^2+y-1)$. Dla każdego z nich rozpoznać, czy f ma w tym punkcie lokalne minimum, lokalne maksimum czy też lokalnego ekstremum nie ma.

Obliczamy pochodne cząstkowe i przyrównujemy je do zera:
$0=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x(\frac{3}{4}x^2+y-1)+\frac{3}{2}x(x^2+y^2-1)$,
$0=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y(\frac{3}{4}x^2+y-1)+(x^2+y^2-1)$,
zatem $0=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{3}{2}x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x(2-3y)(\frac{3}{4}x^2+y-1)$.
Z równości $x=0=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ wynika, że $0=2y(y-1)+y^2-1=(y-1)(3y+1)$, więc $(0,1)$, i $(0,-\frac{1}{3})$ są punktami krytycznymi.
Z równości $y=\frac{2}{3}$ i $0=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ wynika, że $0=\frac{4}{3}(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{3})+x^2-\frac{5}{9}=2x^2-1$, więc $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Mamy następne dwa punkty krytyczne: $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{2}{3})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{2}{3})$.
Ostatnia możliwość, to $0=\frac{3}{4}x^2+y-1$. Wtedy $x^2+y^2-1=0$, więc $y^2-\frac{4}{3}y+\frac{1}{3}=0$, zatem $y=1$ i wtedy $x=0$ lub $y=\frac{1}{3}$ i wtedy $x=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Ostatnie trzy punkty kry-

tyczne to: $(0,1)$, $\big(\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{1}{3}\big)$, $\big(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{1}{3}\big)$. Zajmiemy się dopełnieniem poziomicy $f=0$:
$A_+=\{(x,y)\colon\quad x^2+y^2-1>0\}$, $A_-=\{(x,y)\colon\quad x^2+y^2-1<0\}$,
$B_+=\{(x,y)\colon\quad \frac{3}{4}x^2+y-1>0\}$, $B_-=\{(x,y)\colon\quad \frac{3}{4}x^2+y-1<0\}$.
Zbiór $A_-\cap B_-$ jest ograniczony, funkcja f przyjmuje w nim wartości dodatnie, na jego brzegu zachodzi równość $f=0$, zatem funkcja przyjmuje w nim największą wartość, oczywiście w punkcie zerowania się gradientu, więc w punkcie $(0,-\frac{1}{3})$.
Zbiór $A_-\cap B_+$ składa się z dwu składowych. Jedna z nich jest zawarta w półpłaszczyźnie $(x,y)\colon\quad x<0$, a druga — w półpłaszczyźnie $(x,y)\colon\quad x>0$. W każdej z nich funkcja przyjmuje wyłącznie wartości ujemne, na brzegu zerowe. Domknięcia składowych są zwarte. Wobec tego w pewnym punkcie wewnętrznym funkcja osiąga swe minimum. W każdej z tych składowych jest tylko jeden punkt krytyczny funkcji f: w lewej punkt $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{2}{3})$, a w prawej — $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{2}{3})$. Wobec w każdym z tych punktów funkcja ma minimum lokalne.
Zostały jeszcze trzy punkty krytyczne: $(0,1)$, $\big(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{1}{3}\big)$ i $\big(\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{1}{3}\big)$. W każdym z nich funkcja zeruje się. Każde otoczenie dowolnego z nich ma punkty wspólne zarówno ze zbiorem $A_+\cap B_+$ oraz ze zbiorem $A_-\cap B_+$, więc w każdym otoczeniu są punkty, w których wartości funkcji f są dodatnie jak i punkty, w których wartości tej funkcji są ujemne, a to oznacza, że w tych punktach funkcja nie ma lokalnych ekstremów.
Uwaga. Powinienem oczywiście zadbać o miłośników pochodnych drugiego rzędu. Mamy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=9x^2+\frac{3}{2}y^2+2y-\frac{7}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=x(2+3y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{3}{2}x^2+6y-2$. Mamy wobec tego; $D^2f(0,1)=\begin{pmatrix}0&0\\0&4\end{pmatrix}$, $D^2f(0,-\frac{1}{3})=\begin{pmatrix}-4&0\\0&-4\end{pmatrix}$,
$D^2f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{2}{3})=\begin{pmatrix}3&\pm2\sqrt{2}\\\pm2\sqrt{2}&\frac{11}{4}\end{pmatrix}$, $D^2f(\pm\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{1}{3})=\begin{pmatrix}\frac{16}{3}&\pm2\sqrt{2}\\\pm2\sqrt{2}&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$.
Wyznacznik macierzy $D^2f(0,1)$ jest równy 0, więc twierdzenie o lokalnych ekstremach nie pozwala stwierdzić w tej sytuacji, czy w tym punkcie funkcja ma lokalne ekstremum, czy siodło. Ponieważ jedną z wartości własnych jest liczba $4>0$, więc po obcięciu do prostej własnej funkcja ma lokalne minimum właściwe, zatem na pewno nie ma w tym punkcie lokalnego maksimum. Tak zresztą jest po obcięciu f do dowolnej prostej przechodzącej przez punkt $(0,1)$: $f(at,1+bt)=2b^2t^2+\frac{b}{2}(3+2a^2+b^2)t^3+\frac{3}{4}(a^2+b^2)t^4$. Natomiast gdy ograniczymy dziedzinę f do paraboli o równaniu $\frac{5}{8}x^2+y-1=0$, to otrzymamy $f(x,y)=f\left(x,1-\frac{5}{8}x^2\right)=-\frac{1}{32}x^4+\frac{25}{512}x^6$, więc tym razem otrzymaliśmy lokalne maksimum właściwe, więc punkt $(0,1)$ jest siodłem.
Pozostałe punkty krytyczne są „łatwiejsze”, bo działa kryterium Sylvestera. Macierz $D^2f(0,-\frac{1}{3})$ jest ujemnnie określona, zatem w punkcie $(0,-\frac{1}{3})$ funkcja f ma lokalne maksimum właściwe, macierze $D^2f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{2}{3})$ są dodatnio określone, więc w punktach $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{2}{3})$ funkcja f ma lokalne minima właściwe, a macierze $D^2f(\pm\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{1}{3})$ mają po jednej wartości

własnej dodatniej i po jednej ujemnej, więc w punktach $(\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3})$ są siodła.

---

4. Udowodnić, że w pewnym otoczeniu punktu $(x_0, y_0, w_0) = (2, -1, 1)$ równanie

$$xw = 2 + y\ln w$$

wyznacza zmienną w jako funkcję klasy C^2 pozostałych zmiennych: $w = w(x, y)$.

Napisać jej drugi wielomian Taylora wokół punktu $(x_0, y_0) = (2, -1)$.

Niech $f(x, y, w) = xw - y\ln w$. Mamy $\frac{\partial f}{\partial w}(x, y, w) = x - \frac{y}{w}$, więc $\frac{\partial f}{\partial w}(2, -1, 1) = 2+1 \neq 0$. Z twierdzenia o funkcjach uwikłanych wynika, że w pewnym otoczeniu punktu $(2, -1)$ zmienna w jest wyznaczona jednoznacznie przez (x, y) pod warunkiem, że liczbę w wybieramy z dostatecznie małego otoczenia liczby 1. Wiemy też, że w jest funkcją klasy C^∞, tym bardziej klasy C^2. Obliczymy teraz pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji $w(x, y)$. Zachodzi równość $f(x, y, w(x, y)) = 2$. Wobec tego

$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, w(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial w}(x, y, w(x, y)) \cdot \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) = w(x, y) + (x - \frac{y}{w(x,y)})\frac{\partial w}{\partial x}(x, y)$ oraz

$0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, w(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial w}(x, y, w(x, y)) \cdot \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) = -\ln w(x, y) + (x - \frac{y}{w(x,y)}) \cdot \frac{\partial w}{\partial y}(x, y)$.

Podstawiając $x = 2$, $y = -1$, $w(2, -1) = 1$ otrzymujemy

$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(2, -1, 1) + \frac{\partial f}{\partial w}(2, -1, 1) \cdot \frac{\partial w}{\partial x}(2, -1) = 1 + 3\frac{\partial w}{\partial x}(2, -1)$ oraz

$0 = \frac{\partial f}{\partial y}(2, -1, 1) + \frac{\partial f}{\partial w}(2, -1, 1) \cdot \frac{\partial w}{\partial y}(2, -1) = 3\frac{\partial w}{\partial y}(2, -1)$.

Wynika stąd, że $\frac{\partial w}{\partial x}(2, -1) = -\frac{1}{3}$ i $\frac{\partial w}{\partial y}(2, -1) = 0$.

Znaleźliśmy pochodne pierwszego rzędu, więc kolej na pochodne drugiego rzędu. Zróżniczkujemy stronami otrzymane poprzednio równości $0 = w(x, y) + (x - \frac{y}{w(x,y)})\frac{\partial w}{\partial x}(x, y)$ oraz $0 = -\ln w(x, y) + (x - \frac{y}{w(x,y)}) \cdot \frac{\partial w}{\partial y}(x, y)$.

$0 = \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) + \big(1 + \frac{y}{w^2(x,y)} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}(x, y)\big) \cdot \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) + (x - \frac{y}{w(x,y)}) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y)$,

$0 = \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) + \big(-\frac{1}{w(x,y)} + \frac{y}{w^2(x,y)} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}(x, y)\big) \cdot \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) + (x - \frac{y}{w(x,y)}) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x, y)$,

$0 = -\frac{1}{w(x,y)} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) + (-\frac{1}{w(x,y)} + \frac{y}{w^2(x,y)} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}(x, y)) \cdot \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) + (x - \frac{y}{w(x,y)}) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y)$.

Podstawiając $x = 2$, $y = -1$, $w(2, -1) = 1$, $\frac{\partial w}{\partial x}(2, -1) = -\frac{1}{3}$, $\frac{\partial w}{\partial y}(2, -1) = 0$ otrzymujemy

$0 = -\frac{1}{3} + (1 + \frac{1}{3})(-\frac{1}{3}) + 3 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(2, -1) = -\frac{7}{9} + 3 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(2, -1)$, więc $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(2, -1) = \frac{7}{27}$ oraz

$0 = (-1) \cdot (-\frac{1}{3}) + 3 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(2, -1)$, więc $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(2, -1) = -\frac{1}{9}$ i wreszcie

$0 = 2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(2, -1)$, zatem $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(2, -1) = 0$.

Wynika stąd, że poszukiwany wielomian Taylora to

$-\frac{1}{3}(x-2) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{27}(x-2)^2 + 2(-\frac{1}{9})(x-2)(y+1)\right) = -\frac{x-2}{3} + \frac{7}{54}(x-2)^2 - \frac{1}{9}(x-2)(y+1)$.

Uwaga. Można nieco inaczej obliczać. Jedna z możliwości to napisać: $f(x, y, w) - 2 = xw - y\ln w - 2 = (2 + x - 2)(1 + w - 1) - (-1 + y + 1)\ln(1 + w - 1) =$
$= (x-2) + 2(w-1) + (x-2)(w-1) - (-1+y+1)\left((w-1) - \frac{1}{2}(w-1)^2 + \ldots\right) =$
$= (x-2) + 3(w-1) + (x-2)(w-1) - (y+1)(w-1) - \frac{1}{2}(w-1)^2 + \ldots$, czyli rozwinąć funkcję $f(x, y, w) - 2$ wokół punktu $(2, -1, 1)$ w szereg Taylora (daje się) lub wypisać jej drugi wielomian Taylora w tym punkcie. Potem napisać $w(x, y) = 1 + a(x-2) + b(y+1) + A(x-2)^2 + 2B(x-2)(y+1) + C(y+1)^2 + \ldots$, czyli rozwinąć poszukiwaną funkcję w szereg Taylora (rozwinięcie takie istnieje, ale odpowiedniego twierdzenia

na zajęciach nie było, więc można mówić o drugim wielomianie Taylora — wtedy wielokropek oznacza po prostu konieczność dodania reszty, która jednak na obliczenia wpływu mieć nie będzie). W końcu podstawić w do otrzymanego wcześniej wielomianu Taylora i znaleźć współczynniki (te które oznaczyłem, bo dalszymi autor zadania się nie interesuje). Mamy więc:

$0 = (x-2) + 3\Big(a(x-2) + b(y+1) + A(x-2)^2 + 2B(x-2)(y+1) + C(y+1)^2 + \dots\Big) +$
$+ (x-2)\Big(a(x-2) + b(y+1) + A(x-2)^2 + 2B(x-2)(y+1) + C(y+1)^2 + \dots\Big) -$
$- (y+1)\Big(a(x-2) + b(y+1) + A(x-2)^2 + 2B(x-2)(y+1) + C(y+1)^2 + \dots\Big) -$
$- \frac{1}{2}\Big(a(x-2) + b(y+1) + A(x-2)^2 + 2B(x-2)(y+1) + C(y+1)^2 + \dots\Big)^2 + \dots =$
$= (1+3a)(x-2) + 3b(y+1) + (3A + a - \frac{1}{2}a^2)(x-2)^2 +$
$+(6B + b - a + ab)(x-2)(y+1) + (3C - b - \frac{1}{2}b^2)(y+1)^2 + \dots$

Wynika stąd natychmiast, że $1 + 3a = 0$, $3b = 0$, $3A + a - \frac{1}{2}a^2 = 0$, $6B + b - a + ab = 0$ i $3C - b - \frac{1}{2}b^2 = 0$, czyli $a = -\frac{1}{3}$, $b = 0$, $A = \frac{7}{54}$, $B = -\frac{1}{18}$ i $C = 0$. Stąd wynika, że $w(x,y) = 1 - \frac{1}{3}(x-2) + \frac{7}{54}(x-2)^2 - \frac{1}{9}(x-2)(y+1) + \dots$ Być może studenci poczuliby się lepiej, gdybym pisał wszędzie zamiast wielokropka $o(\|x-2, y+1\|)$, ale postanowiłem napisać te wzory tak, jak zwykle to robię, gdy życie zmusi mnie do znajdowania wielomianów Taylora. Na koniec dodam, że nie ma najmniejszego powodu do zapamiętywania wzoru na różniczkę funkcji uwikłanej, bo i tak trzeba pamiętać wzór na pochodną złożenia, z którego (i z różniczkowalności) wynika pierwszy wspomniany w tym (długim) zdaniu wzór.

---

5. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ rozważmy macierz J rozmiaru $2n \times 2n$ o postaci klatkowej $J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \cdot 2n}$, gdzie I_n oznacza macierz jednostkową, a 0_n — macierz zerową rozmiaru $n \times n$.

Udowodnić, że dla każdego $A \in \mathbb{R}^{2n \cdot 2n}$ macierz $F(A) := AJA^T$ jest antysymetryczna, tzn. $F(A) + F(A)^T = 0_{2n}$.

Dowieść, że $DF(A)H = \psi(\varphi(H))$ dla każdej macierzy H, gdzie $\varphi(B) = AJB^T$ oraz $\psi(C) = C - C^T$. Znaleźć obraz przekształcenia $DF(A)\colon \mathbb{R}^{2n \cdot 2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n \cdot 2n}$.

Udowodnić, że zbiór $\{A \in \mathbb{R}^{2n \cdot 2n} \colon AJA^T = J\}$ jest rozmaitością klasy C^1. Jaki jest jej wymiar?

Mamy $J^T = -J$. Stąd $F(A)^T = (AJA^T)^T = (A^T)^T J^T A^T = -AJA^T = -F(A)$.

Dla dowolnej macierzy H mamy

$$F(A+H) = (A+H)J(A+H)^T = AJA^T + HJA^T + AJH^T + HJH^T.$$

Stąd i z nierówności $\|HJH^T\| \leqslant \|H\| \cdot \|J\| \cdot \|H^T\| = \|H\|^2$ wynika, że

$$DF(A)H = HJA^T + AJH^T = AJH^T - (AJH^T)^T.$$

Obrazem przekształcenia ψ jest zbiór wszystkich macierzy antysymetrycznych, bo jeśli $C^T = -C$, to $\frac{1}{2}(C - C^T) = C$, a oczywiście $(D - D^T)^T = D^T - D$, więc w obrazie ψ są tylko macierze antysymetryczne.

Jeśli $J = F(A) = AJA^T$, to A jest izomorfizmem, bo przekształca przestrzeń $\mathbb{R}^{2n\cdot 2n}$ na siebie. Wobec tego AJ też jest izomorfizmem. Wobec tego przekształcenie φ jest izomorfizmem zaś jądro przekształcenia ψ składa się z macierzy symetrycznych. Wynika stąd, że jeśli $AJA^T = A$, to obraz $DF(A)$ jest zbiorem macierzy antysymetrycznych, więc jest wymiaru $\frac{1}{2}\big((2n)^2 - 2n\big) = n(2n-1)$, zatem $\{A \in \mathbb{R}^{2n\cdot 2n} \colon AJA^T = J\}$ jest rozmaitością klasy C^∞ (więc również C^1) wymiaru $(2n)^2 - n(2n-1) = n(2n+1)$.