Analiza Matematyczna II.1, kolokwium
7 listopada 2014, godz. 16:15 — 19:15

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

0. Sformułować twierdzenie o odwracaniu funkcji i twierdzenie o różniczce funkcji odwrotnej.

---

1. Niech $\mathbf{p} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{a} = (-1, 0)$ i $\mathbf{b} = (1, 0)$. Zdefiniujmy funkcje

$$f(x,y) = f(\mathbf{p}) = \|\mathbf{a}-\mathbf{p}\| + \|\mathbf{b}-\mathbf{p}\|, \quad g(x,y) = \|\mathbf{a}-\mathbf{p}\| - \|\mathbf{b}-\mathbf{p}\|.$$

(a) Znaleźć punkty różniczkowalności funkcji f i g oraz obliczyć grad f i grad g w tych punktach, w których istnieje.

(b) Dowieść, że poziomice funkcji f i g są wzajemnie ortogonalne, tzn. wektory styczne w ich punktach wspólnych są wzajemnie prostopadłe.

---

2. Udowodnić, że funkcję

$$f(x,y) = \frac{(e^{x+y}-1)\sin(x-y)}{x^2-y^2},$$

określoną na zbiorze $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad |x| \neq |y|\}$, można przedłużyć do funkcji ciągłej na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$.

Rozstrzygnąć, czy przedłużenie jest różniczkowalne w całej płaszczyźnie.

---

3. Znaleźć kresy funkcji

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4y + x^4 + y^3 + y^2}$$

na zbiorze $\{(x, y) : \quad y \geq |x| > 0\}$.

---

4. Niech $GL(k)$ oznacza zbiór odwracalnych macierzy wymiaru $k \times k$, a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^k)$ — zbiór wszystkich macierzy wymiaru $k \times k$. Oba zbiory traktujemy jako podzbiory przestrzeni $\mathbb{R}^{k^2}$ utożsamiajac macierz $(a_{i,j})$ z punktem $(a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,k}, a_{2,k}, \ldots, a_{k,k})$ przestrzeni $\mathbb{R}^{k^2}$. Niech $\psi(M) = M^{-1}$ dla $M \in GL(k)$. Wykazać, że przekształcenie ψ jest różniczkowalne i obliczyć $D\psi(M)H$ dla każdego $M \in GL(k)$ i każdego $H \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^k)$.

---

5. Załóżmy, że dla funkcji $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, różniczkowalnej na zbiorze $U = \{x > 0, y > 0\}$, spełniona jest tożsamość

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 7y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Dowieść, że istnieje funkcja różniczkowalna $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f(x, y) = g(x^7y)$.
