Analiza II.2, egzamin, 4 września 2013, 9:05 – 13:05

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** *w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.*
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca. Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!
A może czasem warto coś narysować...

---

1. Niech $f_c(x) = \int_0^\infty e^{-tx}\cos(tx) f(t)\,dt$ dla dowolnej funkcji $f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ całkowalnej na półprostej $[0,\infty)$ względem miary ℓ_1.

a. Rozstrzygnąć, czy z całkowalności funkcji $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ względem miary ℓ_1 wynika całkowalność funkcji $f_c\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ względem tej miary.

b. Udowodnić, że jeśli funkcja f jest całkowalna na $[0,\infty)$, to funkcja f_c jest ciągła na $[0,\infty)$.

c. Rozstrzygnąć, czy z całkowalności funkcji $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ względem miary ℓ_1 wynika różniczkowalność funkcji f_c w punktach otwartej półprostej $(0,\infty)$.

---

2. Traktrysę $\left\{\left(t - \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}, \frac{2}{e^t + e^{-t}}, 0\right)\colon \quad t > 0\right\}$ obracamy wokół osi OX otrzymując trochoidę T. Znaleźć wszystkie liczby $a > 0$, dla których funkcja $(x,y,z) \mapsto a^x$ jest całkowalna na powierzchni T.

---

3. Niech $C = \{(x,y,z)\colon \quad x^2 + y^2 = 1 \text{ i } z = xy\}$. Wykazać, że C jest zwartą i spójną rozmaitością jednowymiarową.
Niech $\omega(x,y,z) = y dx + z dy + x dz$ i niech wektor $(0,1,1)$ styczny do C w punkcie $(1,0,0)$ wyznacza orientację rozmaitości C. Obliczyć $\int_C \omega$.

---

4. Niech $\omega(x,y,z) = \frac{1}{z^3}\,dx + \frac{2y}{z^3}\,dy - \frac{3(x+y^2)}{z^4}\,dz$, $\mathbf{p} = (1,-1,6)$, $\mathbf{q} = (2,5,3)$. Niech C oznacza krótszy z łuków koła wielkiego sfery $x^2+y^2+z^2 = 38$ o początku $\mathbf{p}$ i końcu $\mathbf{q}$.
Znaleźć całkę $\int_C \omega$.

---

5. Znaleźć strumień przepływu pola wektorowego $F(x,y,z) = (xze^{xy}, -yze^{xy}, z)$ przez powierzchnię $\{(x,y,z)\colon \quad 5x^2+2y^2+6z^2+2xy-2yz-2zx = 89,\ z \geq 0\}$ zorientowaną "na zewnątrz (zewnętrznym wektorem normalnym w punkcie $(-1,-4,2)$ jest $\frac{1}{\sqrt{531}}(-11,-11,17)$).