Analiza II.2, egzamin, 25 czerwca 2013, 9:05 – 13:05

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** *w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.*
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!
A może czasem warto coś narysować...

---

1. Niech $\mathbb{R}^k_+ = \{(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}^k\colon\quad x_i>0 \text{ dla } i=1,\ldots,k\}$ i niech X będzie zbiorem wszystkich funkcji $f\colon\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$, całkowalnych względem miary ℓ_k i takich, że $f(\mathbf{x})=0$, gdy $\mathbf{x}\notin\mathbb{R}^k_+$.
Określamy operację, która każdej funkcji $f\in X$ przyporządkowuje funkcję $\widetilde{f}\colon\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$, daną wzorem

$$\widetilde{f}(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathrm{e}^{-\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} f(\mathbf{x})\,d\ell_k(\mathbf{x}) \quad \text{dla} \quad \mathbf{y}\in\mathbb{R}^k_+ \quad \text{oraz} \quad \widetilde{f}(\mathbf{y})=0 \text{ dla } \mathbf{y}\in\mathbb{R}^k\setminus\mathbb{R}^k_+.$$

Uzasadnić, że $\widetilde{f}\in X$.
Dowieść, że jeżeli $f,g\in X$ oraz $h=f*g$, to także $h\in X$ i zachodzi równość

$$\widetilde{h}(\mathbf{y}) = \widetilde{f}(\mathbf{y})\widetilde{g}(\mathbf{y}) \quad \text{dla} \quad \mathbf{y}\in\mathbb{R}^k_+ .$$

---

2. Pole wektorowe $\mathbf{v}\colon\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ dane jest wzorem $\mathbf{v}(x,y,z)=[yz,2xz,\operatorname{arctg}(xyz)]$. Obliczyć strumień pola wektorowego $\mathbf{w}=\operatorname{rot}\mathbf{v}$ przez powierzchnię

$$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon\quad x^2+y^2-4\cos z-\cos^2 z=4,\ |z|\le\pi\},$$

której orientację wyznacza wektor $(1,0,0)$ prostopadły do $T_{(1,0,\pi)}M$.

---

3. Obliczyć całkę formy różniczkowej $\omega=\frac{2xy\,dx-(x^2+y^2)dy}{y^2}$ wzdłuż łuku krzywej określonej równaniem $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{\pi}{6}\sqrt{x^2+y^2}$, mającego początek $(\frac12\sqrt3,\frac12)$ i koniec $(1,\sqrt3)$, położonego w ćwiartce $\{(x,y)\colon\quad x,y>0\}$.

---

4. Obliczyć całkę formy różniczkowej $\omega=(x+y^2)dy\wedge dz+(y+z^2)dz\wedge dx+(z+x^2)dx\wedge dy$ po zorientowanej powierzchni $M=\{(x,y,z)\colon\ \left(x^2+y^2+z^2+3\right)^2=16(x^2+y^2),\ \ y>0\}$, której strona dodatnia jest wyznaczona przez wektor $[0,1,0]$, prostopadły do M w punkcie $(0,3,0)$.

---

5. $\gamma(t)=(t^3-3t,|t^5-5t|)$ dla $t\in\mathbb{R}$ i $C=\gamma([-1,1])$, $\mathbf{p}=\gamma(-1)$, $\mathbf{q}=\gamma(1)$.
Znaleźć zbiór $T_{\mathbf{p}}C$ złożony z wektorów stycznych do zbioru C w punkcie $\mathbf{p}$ i i zbiór $T_{\mathbf{q}}C$ składający się z wektorów stycznych do zbioru C w punkcie $\mathbf{q}$.
Niech $P=\{\mathbf{p}+\mathbf{v}\colon\quad \mathbf{v}\in T_{\mathbf{p}}C\}$, $Q=\{\mathbf{q}+\mathbf{v}\colon\quad \mathbf{v}\in T_{\mathbf{q}}C\}$.
Wykazać, że dokładnie jedna składowa zbioru $\mathbb{R}^2\setminus(C\cup P\cup Q)$ jest ograniczona i znaleźć jej pole, czyli miarę Lebesgue'a.
