Analiza II.2, kolokwium, 13 kwietnia 2013, 10:15 – 13:20

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** *w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.*

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

0. Uzasadnić, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ funkcje $t \mapsto \cos(xt)f(t)$, oraz $t \mapsto \sin(xt)f(t)$ są całkowalne dla każdej funkcji całkowalnej. Niech $S_f(x) = \int_{\mathbb{R}} \sin(tx)f(t)dt$ i $C_f(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)f(t)dt$. Niech $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją mierzalną, że $\int_{\mathbb{R}}(1+t^2)^{13/4}|g(t)|dt < \infty$.
Dowieść, że istnieje taka funkcja całkowalna h, że zachodzi równość

$$\tfrac{d}{dx}\big(S_g(x)\big) = C_h(x).$$

---

1. Obliczyć $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iiint_A \frac{e^{-z}(x+y)^{n+1}}{1+(x+y)^n}\,dx\,dy\,dz$, gdzie A oznacza zbiór zdefiniowany tak: $A = \{(x,y,z)\colon \quad x^2+y^2 < x+y;\ z > 0\}$.

---

2. Obliczyć miarę zbioru $\{(x,y,z)\colon \quad x,y > 0;\ xy < z;\ x^4+z^4 < x^2 z\}$.

---

3. Obliczyć współrzędne środka ciężkości jednorodnego drutu w kształcie łuku krzywej (zwanej kardioidą) o równaniu $r = \frac{1}{2}(1+\cos t)$, gdzie $t \in [0,\pi]$, $x_1 = r\cos t, x_2 = r\sin t$.

---

4. Niech M będzie powierzchnią, która powstała przez pełny obrót łuku okręgu $x^2+z^2 = 2x$, $0 < x < 1$, $0 < z < 1$, wokół osi Oz. Na tej powierzchni leży zbiór A (mierzalny względem miary ℓ_M), $\ell_M(A) = 1$. Dla każdej liczby $t \in (0,1)$ określamy: $A_t = \{(x,y,z) \in A\colon\ z < t\}$, $f(t) = \ell_M(A_t)$. Dowieść, że całka $\int_0^1 f(t)\,dt$ jest równa odległości środka ciężkości zbioru A od płaszczyzny $z = 1$.
