Analiza II.1, egzamin, 9 marca 2013, 9:05 – 13:05

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** *w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.*
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Dla jakich r zbiór

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\quad z^3=x^4+x^2y^4+2y^8\}$$

jest podrozmaitością klasy C^r przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

---

2. Niech $f(x,y,z)=x+y$ i $M=\{(x,y,z):\quad (x^2+y^2+z^2-5)^2+16z^2=16\}$.
Dowieść, że M jest dwuwymiarową rozmaitością. Znaleźć punkty krytyczne funkcji $f_{|M}$, tzn. takie punkty $\mathbf{x}$, w których gradient ∇f jest prostopadły do płaszczyzny $T_{\mathbf{x}}M$ i wyjaśnić, w których z nich funkcja $f_{|M}$ ma lokalne maksimum, w których ma lokalne minimum, a w których nie ma lokalnego ekstremum.

---

3. Niech $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad 4(x+5)^2+(y-16)^2=164\}$, $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad x^2-y^2=9,\ x>0\}$.
Znaleźć $\inf\{\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|:\quad \mathbf{p}\in E,\ \mathbf{q}\in H\}$ i wyjaśnić, czy ten kres dolny jest osiągany.

---

4. Niech $\gamma\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ będzie taką różnowartościową funkcją klasy C^∞, że zbiór $\gamma(\mathbb{R})$ jest domkniętym podzbiorem płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ i dla każdego $t\in\mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $D\gamma(t)$ jest różnowartościowe.
Dowieść, że dla każdej pary liczb $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, istnieje taka liczba $\delta>0$, że dla dowolnych liczb $s,t\in[a,b]$ odcinki o długościach δ i środkach $\gamma(s)$ i $\gamma(t)$, prostopadłe odpowiednio do wektorów $\gamma'(s)$ i $\gamma'(t)$, są rozłączne.
Dowieść, że z założeń o funkcji γ wynika, że zbiór $\gamma(\mathbb{R})$ jest jednowymiarową rozmaitością lub podać przykład świadczący o tym, że $\gamma(\mathbb{R})$ może nie być rozmaitością.

---

5. Znaleźć granicę całek

$$\lim_{n\to\infty}\int_V \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{n^2\big(1-\cos\big(\frac{1}{n}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\big)\big)}\,dx\,dy\,dz\,,$$

gdzie $V=\{(x,y,z):\quad x^2+y^2+z^2\le 1\}$.
