Analiza II, egzamin, 2 lutego 2013, 9:05 – 13:05

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** *w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.*
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Niech $K = \{(x,y,z)\colon\ x^2+y^2+5z^2=4,\ \ xy=1,\ \ x,y>0\}$.
Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości, przyjmowanych przez sumę $x+y+z$ na zbiorze K.

---

2. (a) Dowieść, że równanie $xe^{w-1} = 2y + \ln w$ wyznacza zmienną w jako funkcję pozostałych zmiennych w pewnym otoczeniu punktu $(x_0, y_0, w_0) = (2,1,1)$: $w = g(x,y)$ oraz że g jest funkcją klasy C^∞.

(b) Napisać wielomian Taylora stopnia 2 funkcji g dla otoczenia punktu $(2,1)$.

---

3. Niech $f(x,y) = x^3 - 36xy + y^3$, $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ \ f(x,y)=0\}$, $Q_1 = \{(x,y)\colon\ \ x>0<y\}$, $Q_2 = \{(x,y)\colon\ \ x<0<y\}$, $Q_3 = \{(x,y)\colon\ \ x<0>y\}$ i $Q_4 = \{(x,y)\colon\ \ x>0>y\}$.

(a) Wykazać, że $M\cap Q_1$ jest zbiorem ograniczonym, a $M\cap Q_4$ — nieograniczonym .

(b) Znaleźć $\max\{y\colon\ \ (x,y)\in M\cap Q_1\}$ oraz zbiór $M\cap Q_3$.

(c) Znaleźć przestrzeń $T_{(18,18)}M$ styczną do zbioru M w punkcie $(18,18)$.

(d) Wykazać, że istnieje taka liczba $\delta>0$ i funkcja $\alpha\colon(-\delta,\delta)\longrightarrow\mathbb{R}$, klasy C^∞, że jeśli $|x|<\delta$ i $|y|<\delta$, to: $f(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=\alpha(y)\cdot y^2$ lub $y=\alpha(x)\cdot x^2$. Obliczyć $\alpha(0)$.

(e) Wyjaśnić, czy zbiór $\overline{M\cap Q_2}\cup\{(x,y)\in M\cap Q_1\colon\ \ y<x\}$ jest rozmaitością w $\mathbb{R}^2$.

(f) Znaleźć przestrzeń $T_{(0,0)}M$ styczną do zbioru M w punkcie $(0,0)$.

---

4. Niech $f(x,y) = 6y^5 + 15y^4 - 50y^3 - 90y^2 - \frac{1}{4}\left(-e^{2x} + (y+1)^2(y-2)^2\right)^2$.
Znaleźć kresy funkcji f oraz punkty, w których funkcja ta ma lokalne ekstrema.
Czy znalezione ekstrema są właściwe?

---

5. Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{e^{-n}}^{1}\left(1+\frac{\ln y}{n}\right)^n y^{-3/2}\,d\ell_1$ lub wykazać, że taka granica nie istnieje.