

Analiza II, kolokwium 2, 11 stycznia 2013, 16:20 — 19:20

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia. **Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować!** Nie dotyczy rozruszników serca. Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i **NALEŻY** powoływać się na twierdzenia, które zostały **udowodnione** na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

0. Podać definicję przeliczalnie addytywnego ciała zbiorów i miary na nim określonej. Zdefiniować miarę zewnętrzną Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej. Scharakteryzować zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a w \mathbb{R}^k .
-

1. Znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji $f(x, y, z) = x$ w zbiorze

$$A = \{(x, y, z): x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8, x + y = z\}.$$

2. Dać przykład przekształcenia, będącego dyfeomorfizmem zbioru U na zbiór V :

$$U = \{(x, y): x > 0, y > 0, 1 < x + y < 2\}, \quad V = \{(u, v): u > 0\} \cup \{(u, v): v > 0\}.$$

Znalezione odwzorowanie należy wyrazić albo wprost wzorem albo jako złożenie kilku dyfeomorfizmów (np. $F = F_3 \circ F_2 \circ F_1$), z których każdy jest wyrażony wzorem.

3. Niech $f(x, y) = (x^3 - 3x - y)(y + 2)$.

- (a) Wyznaczyć wszystkie punkty krytyczne funkcji f .
(b) Dla każdego z tych punktów rozpoznać, czy f ma w tym punkcie lokalne ekstremum.
-

4. Niech $a > 0$. Dowieść, że płaszczyzny styczne do powierzchni

$$\{(x, y, z): \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}\}$$

odcinają na osiach układu współrzędnych odcinki, których suma długości jest stała.
