Analiza II, kolokwium 1, 15 listopada 2012, 16:20 — 19:20

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** *w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.* **Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować!** Nie dotyczy rozruszników serca. Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

0. Podać definicję wektora stycznego do zbioru A w punkcie $\mathbf{p} \in A$.
Znaleźć wszystkie wektory styczne do zbioru A w punkcie $\mathbf{p}$, jeśli
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \quad x(x^2-4y^2)(x-y^3)=0\}$, $\mathbf{p} = \mathbf{0} = (0,0)$

---

1. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} xyz \exp\left(\dfrac{z}{x^2+y^2}\right), & \text{gdy } x^2+y^2>0, \\ 0, & \text{gdy } x^2+y^2=0. \end{cases}$$

---

2. Niech $f(x,y) = |e^x - y| \cdot \ln(1+x)$, gdy $x > -1$. Znaleźć wszystkie punkty różniczkowalności funkcji f w półpłaszczyźnie $\{(x,y) \colon \quad x > -1\}$.

---

3. Niech $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \quad z = x^2+y^2\}$, $B = \{(x,y,z) \colon \quad z = 2x+2y-9\}$.
Znaleźć takie punkty $\mathbf{p}_0 \in A$ oraz $\mathbf{q}_0 \in B$, by $\|\mathbf{p}_0 - \mathbf{q}_0\| = \inf\{\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\| \colon \quad \mathbf{p} \in A,\ \mathbf{q} \in B\}$ lub wykazać, że takich punktów $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0$ nie ma.

---

4. Niech $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \quad 1 < x^2+y^2+z^2 < 9\}$ i niech $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją klasy C^1, że dla każdego punktu $(x,y,z) \in P$ zachodzą wszystkie trzy nierówności $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right| \le 1$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right| \le 1$, $\left|\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right| \le 1$.
Rozstrzygnąć, czy z tych założeń wynika, że funkcja f spełnia warunek Lipschitza z pewną stałą.

---

5. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, że spełnione są jednocześnie poniższe trzy warunki:
1° f jest klasy C^1 w zbiorze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
2° f jest ciągła po ograniczeniu do wykresu dowolnego wielomianu $w\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
3° f nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$.
