Analiza II, egzamin, 31 sierpnia 2011

9:05 — 13:05

Tekst został poprawiony 2 czerwca 2013 r.

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Zbadać różniczkowalność funkcji:

a. $f(x,y)=\int_{A_{x,y}}|t-s|\,d\ell_2(t,s)$, gdzie $A_{x,y}=\{(t,s)\in\mathbb{R}^2:\quad 0<t<x^2,\ 0<s<y^2\}$.

b. $f(t)=\int_{x^2+y^2+z^2\le t}h(x^2+y^2+z^2)\,d\ell_3(x,y,z)$, gdzie $h\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}$ oznacza daną funkcję ciągłą.

---

2. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ mamy punkty $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,0,1)$, $D=(1,1,0)$, $E=(1,1,1)$. Rozważamy powierzchnię wielościenną, utorzoną przez trójkąty ADE, DBE, BCE i CAE (rozmaitość z kantami). Dane jest pole wektorowe $\overrightarrow{F}=\left[xz,-yz,\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]$.

Obliczyć przepływ pola $\mathrm{rot}(\overrightarrow{F})$ przez tę powierzchnię, ze strony ujemnej $\Big($„widocznej” z punktu $\left(\frac12,\frac12,\frac12\right)\Big)$ na dodatnią.

---

3. Niech $C_1=\{(x,y):\quad (x-1)^2+y^2=\frac14\}$, $C_2=\{(x,y):\quad (x+1)^2+y^2=\frac14\}$ oraz $C_3=\{(x,y):\quad x^2+y^2=4\}$ będą okręgami zorientowanymi „przeciwnie do ruchu wskazówek zegara”. Niech

$$\omega(x,y)=\frac{x(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2+1)^2-4x^2}\,dy-\frac{y(x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2-4x^2}\,dx\,.$$

Obliczyć całki: $\int_{C_1}\omega$, $\int_{C_2}\omega$ i $\int_{C_3}\omega$.

---

4. Niech $U=\{(x,y,z):\quad x^2+y^2>0\}$, $H_t=\{x^2+y^2-z^2=t\}$ dla każdego $t\in\mathbb{R}$.

Znaleźć taką 2-formę różniczkowa ω na U, że jeśli $\mathbf{p}\in H_t$, $\mathbf{v},\mathbf{w}\in T_{\mathbf{p}}H_t$, to $|\omega(\mathbf{v},\mathbf{w})|$ jest polem równoległoboku rozpiętego przez wektory $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$.

Oblicz całkę $\int_G d\omega$, gdzie $G=\{(x,y,z):\quad x^2+y^2<z^2\quad \text{i}\quad 0<z<1\}$.

---

5. Funkcje f_1, f_2, $\ldots$ są całkowalne w sensie Lebesgue'a na przedziale $[a,b]$. Wykazać, że jeśli $\int_a^b|f_n(x)|\,dx\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, to pewien podciąg (f_{n_k}) ciągu (f_n) jest zbieżny do zera prawie wszędzie, natomiast jeśli jedynie $\int_a^b f_n(x)\,dx\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, to tak być nie musi.
