Analiza II, egzamin, 21 czerwca 2011

10:05 — 14:05

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \quad x < 2y < 4x,\ 1-y < 3x < 3-3y\}$. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \sqrt[n]{x^{-3n} + y^{-3n}}\, d\ell_2 \,.$$

---

2. Na powierzchni walca $W = \{(x,y,z)\colon \quad x^2+y^2 = 1,\ 0 < z < 1\}$ leży zbiór A, mierzalny względem miary powierzchniowej ℓ_W. Dla każdej liczby $t \in (0,1)$ określamy zbiór $A_t = \{(x,y,z) \in A\colon \quad z < t\}$ i liczbę $f(t) = \ell_W(A_t)$. Dowieść, że $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_A (1-z)\,d\ell_W$.

---

3. Niech $\omega = \frac{1}{\sqrt{x+y}}\big((3x+2y)\,dx + x\,dy\big)$.
Obliczyć całkę $\int_C \omega$ wzdłuż łuku okręgu $C = \{(x,y)\colon \quad x^2+y^2 = 1, x \ge 0, y \ge 0\}$ o początku $(1,0)$ i końcu $(0,1)$.

---

4. Obliczyć całkę z 2–formy $\omega = (y^2-x^2)dy\wedge dz + (z-x)dz\wedge dx + (2xz-y)dx\wedge dy$ po powierzchni S powstałej w wyniku obrotu cykloidy opisanej parametrycznie: $x(t) = t-\sin t$, $y(t) = 0$, $z(t) = 1-\cos t$, $0 \le t \le \pi$, wokół prostej $x = \pi$, $y = 0$ (wektor normalny w punkcie $(\pi,0,2)$ orientujący S to $[0,0,1]$).

---

5. Niech X będzie zbiorem tych dwukrotnie różniczkowalnych w sposób ciągły w otoczeniu kuli domkniętej $\overline{B} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k\colon \quad x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2 \le 2106^2\}$ funkcji o wartościach rzeczywistych, których zerują się we wszystkich punktach sfery $\partial B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k\colon \quad x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2 = 2106^2\}$. W przestrzeni liniowej X definiujemy iloczyn skalarny wzorem: $\langle f \mid g\rangle = \int_B fg\,d\ell_k$. Niech $\triangle f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\mathbf{x})$.
Udowodnić, że dla każdej funkcji $f \in X$ zachodzi nierówność $\langle \triangle f \mid f\rangle \le 0$, przy czym staje się ona równością wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\mathbf{x}) = 0$ dla każdego $\mathbf{x} \in B$.
