Analiza II, egzamin, 5 marca 2011

10:00 — 14:00

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Niech $f(x,y) = (2+x)^2(3+y)^3(1-x-y)$. Znaleźć wszystkie te punkty $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, w których funkcja f ma lokalne ekstrema (właściwe lub niewłaściwe).

---

2. Niech $f(x,y,z,u) = x^3+y^3+z^3+u^3$, $g_1(x,y,z,u) = x^2+y^2-xy$ i $g_2(x,y,z,u) = z^2+u^2-zu$. Znaleźć $\min f$ i $\max f$ na zbiorze $\{(x,y,z,u):\quad g_1(x,y,z,u) = 1 = g_2(x,y,z,u)\}$.

---

3. Niech $f_\alpha(x,y,z) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x=y=z=0, \\ \dfrac{\sin x \cdot \operatorname{tg} y \cdot \ln(1+z)}{(x^4-x^2y^2+y^4+z^4)^\alpha}, & \text{gdy } x \neq 0 \text{ lub } y \neq 0, \text{ lub } z \neq 0. \end{cases}$

- **a.** Dla jakich liczb $\alpha > 0$ funkcja f_α jest ciągła?
- **b.** Dla jakich liczb $\alpha > 0$ funkcja f_α jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{0} = (0,0,0)$?
- **c.** Dla jakich liczb $\alpha > 0$ funkcja f_α jest klasy C^1?

---

4. Niech $f(x,y) = \dfrac{x\ln(1+y)}{2x^2+y^2}$.

Obliczyć kres górny funkcji f na zbiorze $A = \{(x,y):\quad 0 < x \leq y \leq 1\}$.

---

5. Niech $f_\lambda(x,y) = x^3 + \lambda(x^2-y^2)$ dla dowolnych $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$.

- **a.** Dla jakich $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{(x,y):\quad f_0(x,y) = c\}$ jest rozmaitością, dla jakich c jest spójny?
- **b.** Dla jakich $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{(x,y):\quad f_1(x,y) = c\}$ jest rozmaitością, dla jakich c jest spójny?
- **c.** Znaleźć afiniczną przestrzeń styczną do zbioru $\{(x,y):\quad f_1(x,y) = 0\}$ w punkcie $(3,-6)$ oraz przestrzeń styczną do zbioru $\{(x,y):\quad f_1(x,y) = 0\}$ w punkcie $(0,0)$.

---

6. Ósemką nazywamy sumę dwóch okręgów zewnętrznie stycznych, stosunek promieni których jest równy $\frac{13}{19}$. Zbiór E jest sumą pewnej rodziny parami rozłącznych ósemek.

Wykazać, że $\ell_2(E) = 0$.
