Analiza II, egzamin, 29 stycznia 2011

9:10 — 13:27

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca. Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Niech $\alpha \in (0,\infty)$ i $f_\alpha(x,y) = \begin{cases} 0\,, & \text{gdy } x = 0 = y, \\ \frac{|x|^\alpha y(x^2-y^2)}{x^4-x^2y^2+y^4}\,, & \text{gdy } x \neq 0 \text{ lub } y \neq 0\,. \end{cases}$

Dla jakich liczb $\alpha > 0$ funkcja f_α jest ciągła?

Dla jakich liczb $\alpha > 0$ funkcja f_α jest klasy C^1 ?

---

2. Niech $f(x,y) = (x^3 - x - y)(2x - y - 2)$.

Wyznaczyć wszystkie punkty krytyczne funkcji f.

Wyjaśnić, w których punktach krytycznych funkcja f ma lokalne maksima, w których ma lokalne minima, a w których lokalnego ekstremu nie ma.

---

3. Niech $f(x,y) = x^4 + y^4$ i $g(x,y) = x^2 + y^2 - xy$.

Znaleźć kresy funkcji f na zbiorze $B = \{(x,y)\colon\quad g(x,y) = 3\}$?

---

4. Dowieść, że obraz K odwzorowania

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto (x,y) = \big(t^3 - 3t^2 + 3t + 5, t^4 - 3t^3 + 3t^2 - t\big) \in \mathbb{R}^2$$

jest podrozmaitością w $\mathbb{R}^2$ klasy C^1.

Czy jest też rozmaitością klasy C^2 ?

Znaleźć równania zbioru $T_{\mathbf{p}}K$ dla tych $\mathbf{p} \in K$, dla których $\overrightarrow{[1241,0]} \in T_{\mathbf{p}}K$.

---

5. Niech D będzie zbiorem wszystkich funkcji różniczkowalnych określonych na R^3 o wartościach rzeczywistych. Niech $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^3$ będą dowolnymi punktami. Wykazać, że

$$\|x_0 - y_0\| = \sup_{f\in D}\left(\inf\left\{\frac{f(x_0)-f(y_0)}{\|\mathrm{grad}\, f(z)\|}\colon\quad z \in \mathbb{R}^3\right\}\right)\,.$$

---

6. Niech $\alpha \in [0,1) \setminus \mathbb{Q}$, niech $f\colon [0,1) \longrightarrow [0,1)$ będzie przekształceniem określonym wzorem $f(x) = x + \alpha - \lfloor x + \alpha \rfloor$ i niech $A \subseteq [0,1)$ będzie zbiorem mierzalnym oraz $\ell_1(A) > 0$.

a. Dowieść, że jeśli $\lambda \in (0,1)$, to istnieje taki przedział $I \subseteq [0,1)$, że $\ell_1(I \cap A) > \lambda \ell_1(I)$.

b. Wykazać, że jeśli $B \subseteq [0,1)$ jest zbiorem mierzalnym, to zbiór $f^{-1}(B)$ też jest mierzalny.

c. Dowieść, że jeśli $f^{-1}(A) = A$, to $\ell_1(A) = 1$.

d. Rozstrzygnąć, czy teza z punktu **c** jest prawdziwa w wypadku $\alpha = \frac{67}{257}$.
