Analiza II, kolokwium drugie, 8 stycznia 2011

9:10 — 12:10

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca. Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

0. Sformuować twierdzenie o lokalnych ekstremach funkcji wielu zmiennych (warunek konieczny oraz warunek dostateczny).

Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ funkcja $\cos(x+y) + a\,\mathrm{tg}(xy)$ ma w punkcie $(0,0)$ lokalne minimum, dla jakich lokalne maksimum, a dla jakich w punkcie $(0,0)$ lokalnego ekstremum w punkcie $(0,0)$ nie ma.

---

1. Udowodnić, że zbiór $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2x^2 + 2(z+1)xy + y^2e^z = 16\}$ jest rozmaitością. Znaleźć $T_{(3,2,0)}S$.

---

2. Udowodnić, że równanie $x \ln w + w \ln y = 0$ wyznacza w otoczeniu punktu $(x_0, y_0) = (1,1)$ zmienną w jako funkcję pozostałych zmiennych: $w = g(x,y)$ i że ta funkcja jest klasy C^∞. Napisać drugi wielomian Taylora funkcji g w punkcie $(1,1)$.

---

3. W zbiorze $C = \{(x,y,z) : x+y+z = 3, xy+xz+yz = 0\}$ znaleźć punkty najbardziej oddalone od osi OZ.

---

4. Niech odwzorowanie $F\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zdefiniowane za pomocą wzoru

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\,, y - \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

a. Znaleźć punkty krytyczne (tzn. takie punkty (x,y), że $\det\big(DF(x,y)\big) = 0$) i odpowiadające im wartości krytyczne odwzorowania F.

b. Wyjaśnić, czy F na?

c. Wykazać, że $F(x,y) = F(u,v)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

albo $x = u$ i $y = v$ albo $x = \frac{u}{u^2+v^2}$ i $y = \frac{-v}{u^2+v^2}$.

d. Znaleźć największą taką liczbę $r > 0$, że zbiór $\{(x,y)\colon \ 0 < x^2+y^2 < r\}$ jest przekształcany przez F dyfeomorficznie na pewien otwarty podzbiór płaszczyzny.