Analiza II, kolokwium pierwsze, 6 listopada 2010

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.
Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

0. Niech $G = \operatorname{int} G \subseteq \mathbb{R}^k$, $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{p} \in G$.
Zdefiniować różniczkę $Df(\mathbf{p})$ odwzorowania f w punkcie $\mathbf{p}$.
Zdefiniować pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{p})$ odwzorowania f w punkcie $\mathbf{p}$.
W przypadku $\ell = 1$ zdefiniować gradient $\operatorname{grad} f(\mathbf{p})$ funkcji f w punkcie $\mathbf{p}$.
Niech A będzie macierzą wymiaru $k \times k$ i niech $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}$. Znaleźć $\operatorname{grad} f(\mathbf{x})$ dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$.

---

1. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie
$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}\,\sin\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{dla } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

---

2. Obliczyć
$$\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \sqrt{\frac{1}{x^4+y^4} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^4+y^4} + \frac{1}{y}}$$
lub wykazać, że ta granica nie istnieje.
Symbol $\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)}$ *oznacza, że badamy granicę funkcji określonej w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych:* $\{(x,y)\colon \quad x>0 \quad \text{i} \quad y>0\}$.

---

3. Na powierzchni $z = xy + 1$ znaleźć punkt położony najbliżej początku układu współrzędnych.

---

4. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^k$ będzie wypukłym zbiorem zwartym. Niech $f\colon A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na A, różniczkowalną we wszystkich punktach wewnętrznych zbioru A. Załóżmy ponadto, że istnieją takie liczby $a_1, a_2, \ldots, a_k$, nie wszystkie równe zeru, że $\sum_{i=1}^k a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \le 0$ dla każdego punktu $\mathbf{x} \in \operatorname{int} A$.
Udowodnić, że funkcja f osiąga swą wartość maksymalną i swą wartość minimalną w pewnych punktach brzegu zbioru A.
