Analiza II, egzamin 19 czerwca 2009

9:07 — 13:07

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Znaleźć trójwymiarową miarę Lebesgue'a zbioru ograniczonego przez sześć powierzchni: $z = x^2 + y^2$, $xy = 2$, $xy = 3$, $y = 2x$, $y = 3x$, $z = 0$.

---

2. Każdy punkt P z okręgu $\{(x,y,z)\colon\quad x^2+y^2=1, z=-1\}$ o środku I łączymy z takim punktem Q leżącym na okręgu $\{(x,y,z)\colon\quad x^2+y^2=1, z=1\}$ o środku J, że kąt zorientowany między wektorem $\overrightarrow{IP}$ a wektorem $\overrightarrow{JQ}$ wynosi 90°. Zbiór M jest sumą odcinków otwartych PQ. Wykazać, że M jest rozmaitością i obliczyć $\iint_M |z|\,dl_M$.

---

3. Niech $K = \{(x,y,z)\colon\quad x^2-2x+z=0,\ y^2-2y-z=-1,\ x\geq 1\}$ będzie zorientowanym łukiem o początku $(1,0,1)$ i końcu $(1,2,1)$. Obliczyć całkę $\int_K \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{x^2+y^2+z^2}$.

---

4. Niech S^+ oznacza półsferę $\{(x,y,z)\colon\quad x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0\}$ zorientowaną w ten sposób, że orientacja $T_{(0,0,1)}$ jest wyznaczona przez parę wektorów $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$, a D^+ — koło $\{(x,y,z)\colon\quad x^2+y^2<1,\ z=0\}$ zorientowane w ten sposób, że orientacja $T_{(0,0,0)}$ jest wyznaczona przez parę wektorów $(-\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$.

Znaleźć $\int_{D^+}\big((x+y)\,dy\wedge dz + (y+z)\,dz\wedge dx + (1-2z)\,dx\wedge dy\big)$.

Znaleźć $\int_{S^+}\big((x+y)\,dy\wedge dz + (y+z)\,dz\wedge dx + (1-2z)\,dx\wedge dy\big)$.

---

5. Niech $M\subseteq\mathbb{R}^k$ będzie zwartą, k–wymiarową rozmaitością z brzegiem (∂M, czyli brzeg rozmaitości M, jest $(k-1)$–wymiarową rozmaitością zwartą) i niech $f\colon G\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie pewną funkcją klasy C^2 określoną na zbiorze otwartym $G\supseteq M$.

Udowodnić, że $\int_{\partial M}(\operatorname{grad} f\cdot\mathbf{n})\,dl_{\partial M} = \int_M\big(\sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\big)\,d\ell_k$.

Udowodnić, że jeśli dla każdego $\mathbf{x}\in\overline{B}(0,r)$ zachodzi równość $\sum_{j=1}^k\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\mathbf{x}) = 0$, to $s_{k-1}r^{k-1}f(\mathbf{0}) = \int_{S^+(r)} f(\mathbf{x})\,dl_{S^+(r)}(\mathbf{x})$, gdzie przez s_{k-1} jest miarą $(k-1)$–wymiarowej sfery o promieniu 1, a $S^+(r)$ oznacza zorientowaną dodatnio, $(k-1)$–wymiarową sferę o promieniu $r>0$.
