Analiza II, kolokwium wiosenne dodatkowe 8 kwietnia 2009

10:03 — 12:09

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

0. Sformułować lemat Fatou.

---

1. Niech $f(x) = \frac{1}{x} \pmod 1$ dla $x \in [0,1]$. Znaleźć taką funkcję $g\colon [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$, że jeśli $\mu(A) = \int_A g(x)\,dl_1(x)$ dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subseteq [0,1]$, to dla dowolnego zbioru borelowskiego $B \subseteq [0,1]$ zachodzi równość $\mu(B) = \mu\big(f^{-1}(B)\big)$ i $\int_{[0,1]} g(x)\,dl_1(x) = 1$

---

2. Niech $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon \quad z > \sqrt{x^2+y^2}\}$. Obliczyć $\int_A ze^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dl_3(x,y,z)$.

---

3. Niech $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ będzie funkcją ciągłą i ograniczoną. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi} \int_a^b \frac{f(y)}{1+n^2(x-y)^2}dy = f(x)$$

oraz że zbieżność jest niemal jednostajna na (a,b).

---

4. Niech $h\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną. Definiujemy wtedy funkcję $\mathcal{L}(h)$ za pomocą wzoru: $\mathcal{L}(h)(x) = \int_0^\infty h(t)e^{-tx}\,dt$. Udowodnić, że jeśli funkcje $f,g\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ są całkowalne, to funkcja $f*g\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt$$

też jest całkowalna i dla każdego $x \geq 0$ zachodzi równość $\mathcal{L}(f*g)(x) = \mathcal{L}(f)(x)\cdot\mathcal{L}(g)(x)$.
